

1^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ~~Παράδοση Πέμπτη 2/11/06 στο μάθημα~~

- 1) (βιβλίο σελ. 36, #16) Να βρεθεί η λύση του προβλήματος ΑΤ, να σχεδιαστεί το γράφημα της λύσης, να αναφερθεί το διάστημα στο οποίο ισχύει η λύση και να περιγράψει η συμπεριφορά της λύσης της καθώς το t προσεγγίζει κάθε άκρο του διαστήματος

$$(1-t^2)y' - ty = t(1-t^2), y(0) = 2$$

- 2) (βιβλίο σελ 64, #23) Ένα δοχείο αρχικά περιέχει 120 λίτρα καθαρό νερό. Ένα μείγμα με συγκέντρωση άλατος $-γ$ - γραμμάρια ανά λίτρο που εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 2 λίτρα ανά λεπτό και το καλά αναδεμένο μείγμα εξέρχεται με τον ίδιο ρυθμό. Να βρεθεί μια έκφραση, συναρτήσει του $-γ$, για την ποσότητα άλατος στο δοχείο, κάθε στιγμή. Επίσης να βρεθεί η οριακή ποσότητα άλατος στο δοχείο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

- 3) (βιβλίο σελ 79, #16) Μια εξίσωση που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση της αύξησης πληθυσμών είναι η εξίσωση Gompertz $\frac{dy}{dt} = f(y) = ry \ln\left(\frac{K}{y}\right)$ όπου r και K θετικές σταθερές. α) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $f(y)$ ως προς y , να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και να προσδιορισθούν αν είναι ασυμπτωτικά ευσταθή η ασταθή. β) Για $0 \leq y \leq K$, να υπολογισθεί τότε η γραφική παράσταση της y ως προς t στρέφει τα κοίλα πάνω και ποτέ κάτω. γ) Για κάθε y με $0 \leq y \leq K$ να δειχθεί ότι η $\frac{dy}{dt}$ που δίνεται από την

εξίσωση Gompertz δεν είναι ποτέ μικρότερη της $\frac{dy}{dt}$ που δίνεται από την λογιστική εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y$$

- 4) (βιβλίο σελ 99, #3) Να προσδιορισθεί κατά πόσο είναι ακριβής η ΔΕ. Αν είναι ακριβής να βρεθεί η λύσης της. $(3x^2 - 2xy + 2)dx + (6y^2 - x^2 + 3)dy = 0$

- 5) (βιβλίο σελ 100, #20) Να δειχθεί ότι η ΔΕ δεν είναι ακριβής αλλά γίνεται ακριβής όταν πολλαπλασιαστεί με κατάλληλο ολοκληρώνοντα παράγοντα και να λυθεί.

$$\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0, \mu(x, y) = ye^x$$

- 6) (βιβλίο σελ 105, # 17) Να λυθεί η ΔΕ $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1}$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε μια αντικατάσταση της μορφής $x = X - h, y = Y - k$. Επιλέξτε τις σταθερές h και k ώστε η εξίσωση να είναι ομογενής ως προς X και Y .