1^{η} Σειρά Ασκήσεων

6.30/16) (α) $(1-t^2)y' - ty = t(1-t^2)$, $y(0)=2$

Θεωρούμε ότι $1-t^2 \neq 0 \Rightarrow t^2 \neq 1 \Rightarrow t \neq \pm 1$. Τότε, η Δ.Ε. γράφεται ως εξής:

$$y' - \frac{t}{1-t^2}\, y = t$$ που είναι μια γραμμική Δ.Ε. $1^{ης}$ τάξης με

$p(t) = \frac{-t}{1-t^2}$ και $g(t)=t$ συνεχείς συναρτ. για κάθε $t \in (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Υπολογίζοντας τον ολοκληρ. παράγοντα, έχουμε

$$\mu(t) = \exp\int\left(-\frac{t}{1-t^2}\right)dt = \exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{(-2t)}{1-t^2}\,dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int\frac{(1-t^2)'}{1-t^2}\,dt\right)$$

$$\Rightarrow \mu(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln|1-t^2|\right).$$

Όμως, από την αρχική συνθ. $y(0)=2$, (επειδή το $t=0 \in (-1,1)$) είναι $1-t^2>0$ για κάθε $t\in(-1,1)$ και τότε

$$\mu(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right) = \exp\left[\ln(1-t^2)^{1/2}\right] = \sqrt{1-t^2}$$

(διότι $\exp(\ln g(t)) = g(t)$ και $a\ln g(t) = \ln[g(t)]^a$, $a\in\mathbb{R}$).

Πολ/ζοντας τη Δ.Ε. με $\mu(t)$, παίρνουμε

$$y'\sqrt{1-t^2} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,y = t\sqrt{1-t^2} \Rightarrow \left(y\sqrt{1-t^2}\right)' = t\sqrt{1-t^2} \Rightarrow$$

$$y\sqrt{1-t^2} = \int t(1-t^2)^{1/2}\,dt + c$$ (όπου c αυθαίρ. σταθ.) $\Rightarrow$

$$y\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int(-2t)(1-t^2)^{1/2}dt + c = -\frac{1}{2}\int(1-t^2)'(1-t^2)^{1/2}dt + c \Rightarrow$$

$$y\sqrt{1-t^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{3}{2}} + c \Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2) + \frac{c}{\sqrt{1-t^2}}}$$

που είναι η γενική λύση της Δ.Ε.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, την αρχική συνθήκη, έχουμε

$$y(0)=2 \Rightarrow -\frac{1}{3} + c = 2 \Rightarrow \boxed{c = \frac{7}{3}}$$

Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2) + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)}.$$

(β) Από το (α), δείξαμε ότι η λύση ισχύει για $-1<t<1$, λόγω της αρχικής συνθήκης $y(0)=2$.

(γ) Υπολογίζουμε τα όρια

$$\lim_{t\to -1^+} y(t) = \lim_{t\to-1^+}\left[-\frac{1}{3}(1-t^2) + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\right] = +\infty,$$ διότι

$$\lim_{t\to-1^+}\left[-\frac{1}{3}(1-t^2)\right] = \left(-\frac{1}{3}\right)0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to-1^+}\left[\frac{7}{3}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\right] = \frac{7}{3}(+\infty) = +\infty.$$

και $\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = \lim\limits_{t\to 1^-}\left[-\frac{1}{3}(1-t^2)+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\right] = -\frac{7}{3}\lim\limits_{t\to 1^-}(1-t^2) +$

$$+\frac{7}{3}\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{1-t^2} = \left(-\frac{7}{3}\right)\cdot 0 + \frac{7}{3}(+\infty) = +\infty$$

Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$y\to\infty$ καθώς $t\to -1$ και $y\to\infty$ καθώς $t\to 1$.

(β) Από τον τύπο $y(t) = -\frac{1}{3}(1-t^2)+\frac{7}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, παρατηρούμε ότι $y(t)=y(-t)$ για κάθε $t\in(-1,1)$.

Επιπλέον, από το (α) γνωρίζουμε ότι

$y\to\infty$, $t\to -1$ και $y\to\infty$, $t\to 1$.

Υπολογίζουμε

$$y'(t) = -\frac{1}{3}(-2t)+\frac{7}{3}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)(1-t^2)^{-3/2}(-\cancel{2}t) = \frac{2}{3}t+\frac{7t}{3(1-t^2)^{3/2}}$$

με $y'(t)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}t\left[2+\frac{7}{(1-t^2)^{3/2}}\right]=0 \Rightarrow \frac{t}{3}\left[\frac{2(1-t^2)^{3/2}+7}{(1-t^2)^{3/2}}\right]=0$

$\Rightarrow t=0$ ή $4(1-t^2)^3+49=0 \Rightarrow t=0$ ή $(1-t^2)^3=-\frac{49}{4}$

$\Rightarrow t=0$ ή $1-t^2=-\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{4}} \Rightarrow t=0$ ή $t^2=1+\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{4}}$

$\Rightarrow t=0$ ή $t=\pm\sqrt{1+\frac{\sqrt[3]{49}}{\sqrt[3]{4}}}\notin(-1,1)$.

οπότε $y'(t)=0 \Rightarrow t=0$.

Ακόμα, είναι $y''(t)=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\,\frac{(1-t^2)^{3/2}-t(3/2)(1-t^2)^{1/2}}{(1-t^2)^3}$

$\Rightarrow y''(t)=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}(1-t^2)^{1/2}\left[\frac{(1-t^2)-\frac{3}{2}t}{(1-t^2)^3}\right]$

με $y''(t)\neq 0$ για $t\in(-1,1)$ $\leadsto$

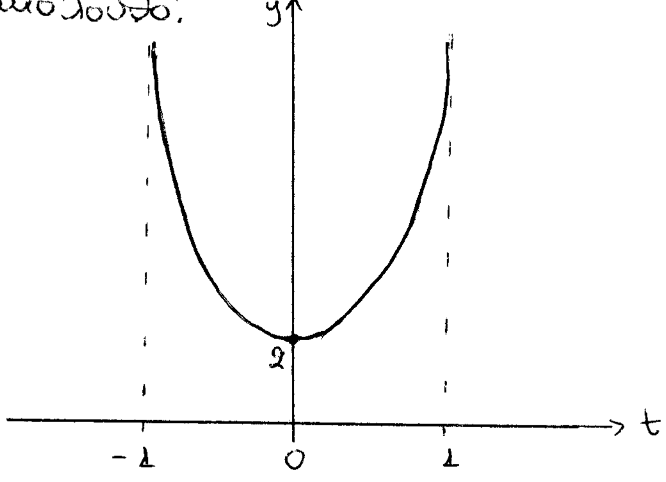
t	-1	0	1
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

και $y''(0)=\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=3>0$.

Αφού $y'(0)=0$ και $y''(0)>0$,

έπεται ότι το 0 είναι ελάχιστο της y.

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι το γράφημα της λύσης είναι το ακόλουθο:



6.64/23.) Έστω $Q(t)$ η ποσότητα του άλατος στο δοχείο τη χρονική στιγμή t (≥ 0), τότε ο ρυθμός μεταβολής της ποσότητας του άλατος στο δοχείο είναι dQ/dt, όπου

$$\frac{dQ}{dt} = \rho_{\text{εισροής}} - \rho_{\text{εκροής}} = \left(\begin{array}{c}\text{ρυθμός εισροής}\\ \text{του άλατος}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{ρυθμός εκροής}\\ \text{του άλατος}\end{array}\right)$$

Εφόσον εισάγεται στο δοχείο μείγμα με συγκέντρωση άλατος γ g/lt με ρυθμό 2lt/min, έπεται ότι

$$\rho_{\text{εισροής}} = 2\gamma \ \ g/min.$$

Ο ρυθμός εκροής του άλατος ισούται με τη συγκέντρωσή του στο δοχείο επί τον ρυθμό με τον οποίο εξέρχεται από το δοχείο (=2lt/min). Αφού, τώρα, ο ρυθμός εισροής ισούται με τον ρυθμό εκροής, ο όγκος νερού στο δοχείο παραμένει σταθερός στα 120 lt. Επιπλέον, επειδή το μείγμα είναι καλά ανακατεμένο η συγκέντρωση του άλατος σε όλο το δοχείο είναι η ίδια, δηλ. $Q(t)/120$ και συνεπώς

$$\rho_{\text{εκροής}} = 2\,\frac{Q}{120} = \frac{Q}{60}.$$

Έτσι, έχουμε

$\dfrac{dQ}{dt} = 2\gamma - \dfrac{Q}{60} \Rightarrow Q' + \dfrac{1}{60}Q = 2\gamma$ (που είναι γραμμ. Δ.Ε. 1ης τάξης με $p(t)=\frac{1}{60}$, $g(t)=2\gamma$ συνεχείς και ολοκληρ. παράγοντα

$\mu(t) = \exp\left(\int p(t)\,dt\right) = \exp\left(\int \frac{1}{60}dt\right) = e^{t/60}\big) \Rightarrow e^{t/60}Q' + \frac{1}{60}e^{t/60}Q = 2\gamma e^{t/60}$

$\Rightarrow \left(e^{t/60}Q\right)' = 2\gamma e^{t/60} \Rightarrow e^{t/60}Q = \int 2\gamma e^{t/60}dt + c \Rightarrow$

$e^{t/60}Q = 2\gamma\int e^{t/60}dt + c = 2\gamma\cdot 60\int \frac{1}{60}e^{t/60}dt + c = 120\gamma\int \left(e^{t/60}\right)'dt + c$

$\Rightarrow e^{t/60}Q = 120\gamma e^{t/60} + c \Rightarrow \boxed{Q(t) = 120\gamma + ce^{-t/60}}$

Επειδή το δοχείο αρχικά περιέχει μόνο νερό, έχουμε την αρχική συνθήκη $Q(0)=0 \Rightarrow 120\gamma + c = 0 \Rightarrow c = -120\gamma$, οπότε

$$Q(t) = 120\gamma - 120\gamma e^{-t/60}$$

$\Rightarrow \boxed{Q(t) = 120\gamma\left(1-e^{-t/60}\right)}$ που εκφράζει την ποσότητα του άλατος στο δοχείο κάθε χρονική στιγμή t.

Ακόμα, υπολογίζουμε

$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \lim_{t\to\infty}\left[120\gamma\left(1-e^{-t/60}\right)\right] = 120\gamma \lim_{t\to\infty}\left(1-e^{-t/60}\right)$

$= 120\gamma(1-0) \Rightarrow \boxed{\lim_{t\to\infty} Q(t) = 120\gamma}$ που είναι η ζητούμενη οριακή ποσότητα άλατος στο δοχείο.//

(διότι $\lim_{t\to\infty} e^{-t/60} = 0$)

6.79/16) $\dfrac{dy}{dt} = r y \ln(K/y)$, r, K σταθ >0

(α) Θέτουμε $f(y) = r y \ln(K/y)$. Για τα κρίσιμα σημεία, υπολογίζουμε

$f(y)=0 \Rightarrow r y \ln(K/y) = 0 \xRightarrow{\boxed{r>0}} y \ln(K/y) = 0 \Rightarrow$

$y = 0$ ή $\ln(K/y) = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $K/y = e^0 = 1 \Rightarrow$

$y = 0$ ή $y = K$.

Άρα, τα κρίσιμα σημεία είναι τα $y_1 = 0$ και $y_2 = K$.

Για να προσδιορίσουμε κατά πόσον τα κρίσιμα σημεία είναι ασυμπτωτικά ευσταθή ή ασταθή, υπολογίζουμε

$$f'(y) = \frac{d}{dy}\left[r y \ln\left(\frac{K}{y}\right)\right] = r\,(y)'\ln\left(\frac{K}{y}\right) + r y \frac{d}{dy}\left[\ln\left(\frac{K}{y}\right)\right]$$

$$= r \ln\left(\frac{K}{y}\right) + r y \frac{1}{\frac{K}{y}} \frac{d}{dy}\left(\frac{K}{y}\right) = r \ln\left(\frac{K}{y}\right) + \frac{r}{\cancel{K}} y^{\cancel{2}}\left(-\frac{\cancel{K}}{\cancel{y^2}}\right)$$

$$\Rightarrow f'(y) = r\left[\ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1\right]$$

με $f'(y) = 0 \Rightarrow r\left[\ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1\right] = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{K}{y}\right) = 1$

$$\Rightarrow \frac{K}{y} = e^1 \Rightarrow \boxed{y = K/e}$$

Παρατηρούμε ότι

$$f'(K/2e) = r\left[\ln\left(\frac{K}{K/2e}\right) - 1\right] = r\left[\ln(2e) - 1\right] = r\left[\ln 2 + \cancel{\ln e} - \cancel{1}\right]$$

$\Rightarrow f'(K/2e) = r\ln 2 > 0$, άρα $f'(y) > 0$ για $y \in \left(0, \frac{K}{e}\right)$,

$f'\left(\frac{K}{2}\right) = r\left[\ln\left(\frac{K}{K/2}\right) - 1\right] = r(\ln 2 - 1) < 0 \rightsquigarrow f'(y) < 0,\ y \in \left(\frac{K}{e}, K\right)$,

$f'(Ke) = r\left[\ln\left(\frac{K}{Ke}\right) - 1\right] = r(\ln e^{-1} - 1) = -2r < 0 \rightsquigarrow f'(y) < 0,\ y > K$

Ανάλογα, για την f έχουμε

$f\left(\frac{K}{2e}\right) = r\frac{K}{2e}\ln\left(\frac{K}{K/2e}\right) = r\frac{K}{2e}(\ln 2 + 1) > 0 \rightsquigarrow f(y) > 0,\ y \in \left(0, \frac{K}{e}\right)$,

$f\left(\frac{K}{2}\right) = r\frac{K}{2}\ln\left(\frac{K}{K/2}\right) = \frac{rK}{2}\ln 2 > 0 \rightsquigarrow f(y) > 0,\ y \in \left(\frac{K}{e}, K\right)$ και

$f(Ke) = rKe\ln\left(\frac{K}{Ke}\right) = rKe(-1) = -rKe < 0 \rightsquigarrow f(y) < 0$, $y > K$.

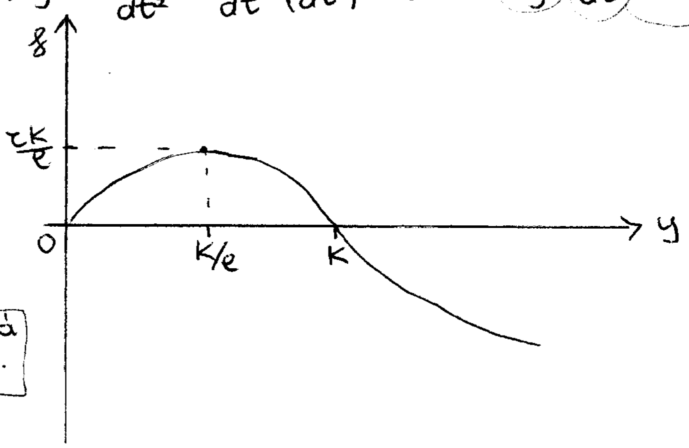
Οπότε, έχουμε

y	0		K/e		K	$+\infty$
$y' = f$	0	+		+	0	−
f'		+	0	−		−
$y'' = f \cdot f'$		+		−		+
$y(t)$		↗ ⌣		↗ ⌢		↘ ⌣

$y_1 = 0$: ασταθές σ.ι.

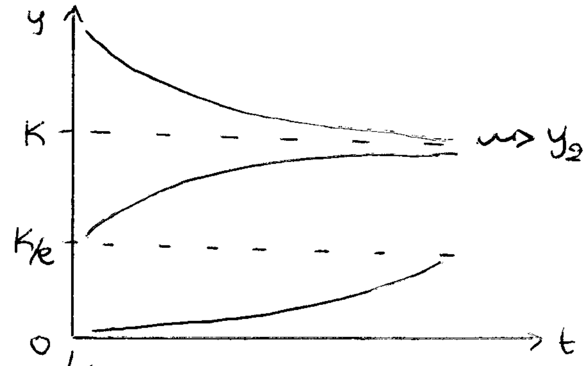
$y_2 = K$: ασυμπτωτικά ευσταθές σ.ι.

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dt} = f' f$$



(β) Με βάση το πινακάκι του ερωτήμ. (α), η γραφική παράσταση της y ως προς t (για $0 \le y \le K$) στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω για $0 \le y \le \frac{K}{e}$ και $y \ge K$ (δηλ. εκεί όπου $y'' > 0$), ενώ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω για $\frac{K}{e} \le y \le K$ (εκεί όπου $y'' < 0$)

Μάλιστα, σχηματικά έχουμε



$\rightsquigarrow y_2 = K$: ασυμπτ. <u>ΕΥΣΤΑΘΕΣ</u> σ.ι.

$\hookrightarrow y_1 = 0$: <u>ΑΣΤΑΘΕΣ</u> σ.ι.

(γ) Θέλουμε ν.δ.ό. $(\forall\, y \in (0, K])$

$$ry\ln\left(\frac{K}{y}\right) \ge r\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \overset{y>0}{\underset{r>0}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\boxed{\ln\left(\frac{K}{y}\right) \ge 1 - \frac{y}{K}}\ , \quad 0 < y \le K$$

Αρκεί, λοιπόν, ν.δ. την τελευταία ανισότητα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(y) = \ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1 + \frac{y}{K}$ και υπολογίζουμε

$$g'(y) = \frac{1}{\frac{K}{y}}\left(-\frac{K}{y^2}\right) + \frac{1}{K} \Rightarrow g'(y) = -\frac{1}{y} + \frac{1}{K} \quad \text{με}$$

$$g'(y^*) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{y^*} + \frac{1}{K} = 0 \Rightarrow \frac{1}{y^*} = \frac{1}{K} \Rightarrow \underline{y^* = K}$$

και

$$g''(y) = \frac{1}{y^2} > 0\ , \quad \forall\, y \in (0, K] \quad (\text{οπότε και } g''(K) > 0).$$

Εφόσον $g''(y) > 0$, $\forall\, y \in (0, K]$, η g είναι κυρτή στο $(0, K]$ και συνεπώς, το $y^* = K$ είναι (ολικό) ελάχιστο της g στο διάστημα $(0, K]$ και άρα, $\forall\, y \in (0, K]$ ισχύει ότι

$$g(y) \ge g(K) \Rightarrow \ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1 + \frac{y}{K} \ge \ln\left(\frac{K}{K}\right) - 1 + \frac{K}{K} = 0 - 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{K}{y}\right) - 1 + \frac{y}{K} \ge 0 \Rightarrow \boxed{\ln\left(\frac{K}{y}\right) \ge 1 - \frac{y}{K}} \quad \forall\, y \in (0, K]$$

που είναι το ζητούμενο. //

6.99/3) $(3x^2-2xy+2)\,dx+(6y^2-x^2+3)\,dy=0$ (E)

Θέτουμε $M(x,y)=3x^2-2xy+2$, $N(x,y)=6y^2-x^2+3$ και υπολογίζουμε

$$M_y(x,y)=\frac{d}{dy}(3x^2-2xy+2)=0-2x+0 \Rightarrow \boxed{M_y(x,y)=-2x}$$

και

$$N_x(x,y)=\frac{d}{dx}(6y^2-x^2+3)=0-2x+0 \Rightarrow \boxed{N_x(x,y)=-2x}$$

Αφού, λοιπόν, $M_y(x,y)=N_x(x,y)$, έπεται ότι η Δ.Ε. είναι ακριβής.

Επειδή, τώρα, οι συναρτήσεις M, N, M_y, N_x είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$ (ως πολυωνυμικές), τότε $\exists$ συνάρτηση $\psi=\psi(x,y)$: $\psi_x(x,y)=M(x,y)$ και $\boxed{\psi_y(x,y)=N(x,y).}$ (1)

Έτσι, έχουμε

$$\psi_x(x,y)=3x^2-2xy+2 \Rightarrow \psi(x,y)=\int(3x^2-2xy+2)\,dx+h(y) \Rightarrow$$
$$\psi(x,y)=x^3-x^2y+2x+h(y)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς y, λαμβάνουμε

$$\psi_y(x,y)=\frac{d}{dy}\left(x^3-x^2y+2x+h(y)\right) \Rightarrow \psi_y(x,y)=0-x^2+0+h'(y)$$
$$\Rightarrow \psi_y(x,y)=-x^2+h'(y) \overset{(1)}{\Longrightarrow} -x^2+h'(y)=6y^2-\cancel{x^2}+3$$
$$\Rightarrow h'(y)=6y^2+3 \Rightarrow h(y)=\int(6y^2+3)\,dy \Rightarrow \underline{h(y)=2y^3+3y}.$$

Άρα, $\psi(x,y)=x^3-x^2y+2x+2y^3+3y$ και τότε, η λύση της Δ.Ε. σε πεπλεγμένη μορφή είναι

$$\psi(x,y)=c \Rightarrow \boxed{x^3-x^2y+2x+2y^3+3y=c}$$

6.100/20) $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$, $u(x,y)=ye^x$

Θέτουμε $M(x,y)=\dfrac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x$, $N(x,y)=\dfrac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}$

και υπολογίζουμε

$$M_y=\frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)=\frac{(\sin y)'y-\sin y\,(y)'}{y^2}-0=\frac{y\cos y-\sin y}{y^2},$$

$$N_x=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos y}{y}+\frac{2}{y}e^{-x}\cos x\right)=0+\frac{2}{y}\left[(e^{-x})'\cos x+e^{-x}(\cos x)'\right]$$
$$\Rightarrow N_x=-\frac{2}{y}e^{-x}(\cos x+\sin x)$$

Αφού $M_y=\dfrac{y\cos y-\sin y}{y^2}\neq N_x=-\dfrac{2}{y}e^{-x}(\cos x+\sin x)$, έπεται ότι η δοθείσα Δ.Ε. δεν είναι ΑΚΡΙΒΗΣ.

Πολ/Ζοντας, τώρα, τη Δ.Ε. με $u(x,y) = ye^{x}$, παίρνουμε

$$\left[ye^{x}\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x}\sin x\right)\right]dx + \left[ye^{x}\left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{y}\right)\right]dy = 0 \qquad \underline{(E')}$$

και είναι $u(x,y)M(x,y) = e^{x}\sin y - 2y\sin x$ με

$$(uM)_y = \frac{d}{dy}(uM) = \frac{d}{dy}\left(e^{x}\sin y - 2y\sin x\right) = e^{x}\cos y - 2\sin x$$

και

$$u(x,y)\cdot N(x,y) = \cancel{y}e^{x}\left(\frac{\cos y + 2e^{-x}\cos x}{\cancel{y}}\right) = e^{x}\cos y + 2\cos x \text{ με}$$

$$(uN)_x = \frac{d}{dx}\left(e^{x}\cos y + 2\cos x\right) = e^{x}\cos y - 2\sin x$$

Πράγματι, είναι $(uM)_y = (uN)_x = e^{x}\cos y - 2\sin x$ και συνεπώς, η (E') είναι <u>ΑΚΡΙΒΗΣ</u> Δ.Ε.

Αφού οι $uM, uN, (uM)_y, (uN)_x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$, $\exists$ συνάρτ. $\psi=\psi(x,y)$:

(*) $\boxed{\psi_x = uM = e^{x}\sin y - 2y\sin x}$ και $\psi_y = uN = e^{x}\cos y - 2\sin x$.

Έτσι, έχουμε

$$\psi_y(x,y) = e^{x}\cos y - 2\sin x \Rightarrow \psi(x,y) = \int(e^{x}\cos y - 2\sin x)dy + h(x)$$

$$\Rightarrow \psi(x,y) = e^{x}\int\cos y\,dy - 2\sin x\int dy + h(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi(x,y) = e^{x}\sin y - 2y\sin x + h(x)} \quad (2)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x, λαμβάνουμε

$$\psi_x(x,y) = e^{x}\sin y - 2y\cos x + h'(x)$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} e^{x}\cancel{\sin y} - 2y\cos x + h'(x) = e^{x}\cancel{\sin y} - 2y\sin x$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2y(\cos x - \sin x) \Rightarrow h(x) = 2y\int(\cos x - \sin x)dx$$

$$\Rightarrow h(x) = 2y(\sin x + \cos x)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στη (2), προκύπτει ότι

$$\psi(x,y) = e^{x}\sin y - 2y\cancel{\sin x} + 2y(\cancel{\sin x} + \cos x) \Rightarrow$$

$$\psi(x,y) = e^{x}\sin y + 2y\cos x$$

και άρα, η λύση της Δ.Ε. σε πεπλεγμένη μορφή είναι

$$\psi(x,y) = c \Rightarrow \boxed{e^{x}\sin y + 2y\cos x = c}$$

6.105/17) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y-5}{x-y-1} \qquad (E)$$

Για $x = X-h$, είναι $\frac{dx}{dX} = \frac{d}{dX}(X-h) = 1 \Rightarrow \underline{dx = dX}$ και

για $y = Y-k$, είναι $\frac{dy}{dY} = \frac{d}{dY}(Y-k) = 1 \Rightarrow \underline{dy = dY}$.

Αντικαθιστώντας τα παραπάνω, η (E) γράφεται ως εξής:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X-h+3(Y-k)-5}{X-h-(Y-k)-1} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y-(h+3k+5)}{X-Y+(-h+k-1)} \qquad (E')$$

Για να μετατραπεί η (E') σε ομογενή, θα πρέπει

$$\begin{cases} h+3k+5=0 & (+) \\ -h+k-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4k+4=0 \\ h=k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=-1 \\ h=-2 \end{cases}$$

οπότε $\begin{cases} x = X+2 \\ y = Y+1 \end{cases}$ $\underline{\underline{(**)}}$.

Έτσι, η (E') γίνεται

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+3Y}{X-Y} \Rightarrow \boxed{\frac{dY}{dX} = \frac{1+3\left(\frac{Y}{X}\right)}{1-\left(\frac{Y}{X}\right)}} \quad (E_1)$$

Θέτοντας $u=\frac{Y}{X}$, έχουμε $Y = uX \Rightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{d}{dX}(uX) \Rightarrow$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX}X + u\frac{dX}{dX} \Rightarrow \frac{dY}{dX} = u + X\frac{du}{dX}$$

και αντικαθιστώντας στην (E_1), παίρνουμε

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{1+3u}{1-u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{1+3u-u(1-u)}{1-u} \Rightarrow$$

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1+3u-u+u^2}{1-u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{1+2u+u^2}{1-u} \Rightarrow X\frac{du}{dX} = \frac{(1+u)^2}{1-u}$$

$$\Rightarrow \frac{1-u}{(1+u)^2}du = \frac{dX}{X} \Rightarrow \int \frac{1-u}{(1+u)^2}du = \int\frac{dX}{X} + c \Rightarrow$$

Το κλάσμα $\frac{1-u}{(1+u)^2}$ αναλύεται ως εξής: $\frac{1-u}{(1+u)^2} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{(1+u)^2}$, όπου

$$A = \lim_{u\to -1}\frac{1}{(2-1)!}\frac{d}{du}\left[\cancel{(1+u)^2}\frac{1-u}{\cancel{(1+u)^2}}\right] = \lim_{u\to-1}\frac{d}{du}(1-u) \Rightarrow \boxed{A=-1}$$ και

$$B = \lim_{u\to -1}\frac{1}{(2-2)!}\left[\cancel{(1+u)^2}\frac{1-u}{\cancel{(1+u)^2}}\right] = \lim_{u\to-1}(1-u) \Rightarrow \boxed{B=2}$$

Οπότε

$$\int\frac{1-u}{(1+u)^2}du = \int\frac{dX}{X} + c \Rightarrow \int\frac{-1}{1+u}du + \int\frac{2}{(1+u)^2}du = \ln|X| + c \Rightarrow$$

$$-\ln|1+u| + 2\int(1+u)^{-2}du - \ln|X| = c \Rightarrow -\ln(|X||1+u|) + \frac{2(1+u)^{-1}}{(-1)} = c$$

$$\Rightarrow \ln|X(1+u)| + \frac{2}{1+u} = -c \xrightarrow[\boxed{C'=-C}]{\boxed{u=\frac{Y}{X}}} \ln\left|X\left(1+\frac{Y}{X}\right)\right| + \frac{2}{1+\frac{Y}{X}} = C' \Rightarrow$$

$$\ln|X+Y| + 2\frac{X}{X+Y} = C' \xrightarrow[\boxed{Y=y-1}]{\boxed{X=x-2}} \boxed{\ln|x+y-3| + 2\left(\frac{x-2}{x+y-3}\right) = C'}$$

που είναι η ζητούμενη λύση της Δ.Ε. σε πεπλεγμένη μορφή. //