2η Σειρά Ασκήσεων

1) Θεωρείστε το πρόβλημα ΑΤ

$$y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \beta > 0$$

(α) Να λυθεί το πρόβλημα Α.Τ.

(β) Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες t_0, y_0 του μέγιστου σημείου της λύσης ως συνάρτηση β.

(γ) Να προσδιορισθεί η μικρότερη τιμή του β για την οποία $y_0 \geq 4$.

(δ) Να εξετασθεί η συμπεριφορά των t_0 και y_0 καθώς $\beta \to \infty$.

2) Να επαληθευτεί ότι είναι λύσεις οι συνάρτησης y_1, y_2 της ΔΕ. Είναι θεμελιώδες σύστημα λύσεων?

$$x^2 y'' - x(x+2) y' + (x+2) y = 0,\ x > 0,\ y_1(t) = x,\ y_2(t) = xe^x$$

3) Αν y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $t^2 y'' - 2y' + te^t y = 0$ και η $W(y_1, y_2)(1) = 2$ να βρεθεί η τιμή της $W(y_1, y_2)(5)$.

4) Θεωρείστε το πρόβλημα ΑΤ

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1) y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(α) Να βρεθεί η λύσει του $y(t)$

(β) Για $a = 1$ να βρεθεί το μικτότερο T, τέτοιο ώστε $|y(t)| < 0.1$ για $t > T$.

(γ) Να επαναληφθεί το ερώτημα με (β) για $a = 1/4, 1/2, 2$

(δ) Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των (β) και (γ) να σχεδιασθεί το T ως προς a και να περιγράφει η η σχέση μεταξύ T και a.

5) Να βρεθεί η 2η λύση της ΔΕ $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 0.25) y = 0,$ αν η 1η είναι $y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$.

6) Να βρεθεί μια μορφή για την ειδική λύση $Y(t)$

$$y'' + 4y' + 2y = e^t (t^2 + 1) \sin 2t + 3e^{-t} \cos t + 4e^t$$

7) Να επαληθευτεί ότι οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ομογενούς και να βρεθεί μια μερική λύση της ΔΕ $t^2 y'' - t(t+2) y' + (t+2) y = 2t^3, y_1(t) = t, y_2(t) = te^t$