2η Σειρά Ασκήσεων

σ.144/26. $y'' + 5y' + 6y = 0, \; y(0) = 2 \; ; \; y'(0) = \beta$

(α) Αν $y = e^{rt}$, τότε η χαρακτ/κή εξίσ. που αντιστοιχεί στη Δ.Ε. είναι
$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r+2)(r+3) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, \; r_2 = -3,$$
οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. είναι $y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$
και χρησιμοποιώντας την αρχική συνθ., έχουμε $\left(y'(t) = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}\right)$
$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ -2c_1 - 3c_2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + 2c_2 = 4 \\ -2c_1 - 3c_2 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 - c_2 \\ -c_2 = 4 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \beta + 6 \\ c_2 = -(\beta + 4) \end{cases}$$
Επομένως, η λύση του Π.Α.Τ. είναι
$$\boxed{y(t) = (\beta+6)e^{-2t} - (\beta+4)e^{-3t}}$$

(β) Για την εύρεση του μέγιστου σημείου (t_0, y_0), υπολογίζουμε
$$y'(t_0) = 0 \Rightarrow -2(\beta+6)e^{-2t_0} + 3(\beta+4)e^{-3t_0} = 0 \xRightarrow{\text{επί } e^{3t_0}} -2(\beta+6)e^{t_0} + 3(\beta+4) = 0$$
$$\Rightarrow e^{t_0} = \frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)} \Rightarrow \boxed{t_0 = \ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right]}$$
και τότε
$$y_0 = y(t_0) = (\beta+6)\exp\left\{-2\ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right]\right\} - (\beta+4)\exp\left\{-3\ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right]\right\}$$
$$\Rightarrow y_0 = (\beta+6)\exp\left\{\ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right]^{-2}\right\} - (\beta+4)\exp\left\{\ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right]^{-3}\right\}$$
$$\Rightarrow y_0 = (\beta+6)\frac{4(\beta+6)^2}{9(\beta+4)^2} - \cancel{(\beta+4)}\frac{8(\beta+6)^3}{27(\beta+4)^{\cancel{3}\,2}} = \frac{4(\beta+6)^3}{27(\beta+4)^2}.$$
Άρα, το μέγιστο σημείο της λύσης έχει συντεταγμένες
$$(t_0, y_0) = \left(\ln\left[\frac{3(\beta+4)}{2(\beta+6)}\right], \frac{4(\beta+6)^3}{27(\beta+4)^2}\right).$$

(γ) $y_0 \geq 4 \Rightarrow \cancel{4}\dfrac{(\beta+6)^3}{27(\beta+4)^2} \geq \cancel{4} \Rightarrow \beta^3 + 18\beta^2 + 108\beta + 216 \geq 27\beta^2 + 216\beta + 432$

$\Rightarrow p(\beta) = \beta^3 - 9\beta^2 - 108\beta - 216 \geq 0 \xRightarrow{\boxed{p(-3)=0}} (\beta+3)(\beta^2 - 12\beta - 72) \geq 0 \Rightarrow$

$(\beta+3)(\beta - 6 + 6\sqrt{3})(\beta - 6 - 6\sqrt{3}) \geq 0$

Είναι $p'(\beta) = 3\beta^2 - 18\beta - 108 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 3 - 3\sqrt{5}, \; \beta_2 = 3 + 3\sqrt{5}$ ~~και~~ από τον παρακάτω πίνακα

β	$-\infty$ … $6-6\sqrt{3}$	$6-6\sqrt{3}$ … $3-3\sqrt{5}$	$3-3\sqrt{5}$ … -3	-3 … $3+3\sqrt{5}$	$3+3\sqrt{5}$ … $6+6\sqrt{3}$	$6+6\sqrt{3}$ … $+\infty$
$p'(\beta)$	+	+	−	−	+	+
$p(\beta)$	↗	0 ⊖ ↗	↘	0 ⊖ ↘	↗	0 ⊕ ↗

$p(\beta) = 0$ … 0 … 0 (*) συμπεραίνουμε ότι για

$\beta \geq 6 + 6\sqrt{3}$ είναι $p(\beta) \geq 0 \; (\Leftrightarrow y_0 \geq 4)$.

Συνεπώς, η μικρότερη τιμή του β για την οποία $y_0 \geq 4$ είναι $\boxed{\beta = 6 + 6\sqrt{3}}$.

(δ) $\lim_{b\to\infty} t_0 = \lim_{b\to\infty}\left\{\ln\left[\frac{3b\left(1+\frac{4}{b}\right)}{2b\left(1+\frac{6}{b}\right)}\right]\right\} = \ln\left[\frac{3(1+0)}{2(1+0)}\right] = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \lim_{b\to\infty} t_0 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ (διότι $\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b}=0$)

και $\lim_{b\to\infty} y_0 = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{4(b+6)^3}{27(b+4)^2}\right] = \frac{4}{27}\lim_{b\to\infty}\frac{b^{\cancel{3}}\left(1+\frac{6}{b}\right)^3}{\cancel{b^2}\left(1+\frac{4}{b}\right)^2} = \infty$,

διότι $b\to\infty$ και $\lim_{b\to\infty}\frac{\left(1+\frac{6}{b}\right)^3}{\left(1+\frac{4}{b}\right)^2} = \frac{(1+0)^3}{(1+0)^2} = 1$. //

6.154/25 $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0,\ x>0,\ y_1(x)=x,\ y_2(x)=xe^x$

Είναι $y_1'(x)=1$, $y_1''(x)$, οπότε αντικαθιστώντας την y_1 στη Δ.Ε, παίρνουμε

$$x^2\cdot 0 - x(x+2)\cdot 1 + (x+2)x = 0 - x(\cancel{x+2}) + x(\cancel{x+2}) = 0$$

και εφόσον η y_1 επαληθεύει την Δ.Ε. είναι προφανώς λύση της.

Για την $y_2(x)=xe^x$, είναι $y_2'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$, $y_2''(x) = (x+2)e^x$ και αντικαθιστώντας στη Δ.Ε.

$$x^2(x+2)e^x - x(x+2)(x+1)e^x + (x+2)xe^x = x(x+2)e^x[x-(x+1)+1]$$
$$= x(x+2)e^x(\cancel{x}-\cancel{x}-\cancel{1}+\cancel{1}) = 0,$$

οπότε πράγματι και η y_2 είναι λύση της Δ.Ε.

Η ορίζουσα Wronski των δύο αυτών λύσεων είναι

$$W(y_1,y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & (x+1)e^x\end{vmatrix} = x(x+1)e^x - xe^x$$
$$= xe^x(x+\cancel{1}-\cancel{1}) = x^2e^x \neq 0,\quad \forall x>0,$$

οπότε οι y_1, y_2 αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων.

6.162/20 $ty'' + 2y' + te^ty = 0$, $W(y_1,y_2)(1) = 2$

Για $t\neq 0$, η Δ.Ε. γράφεται $y'' + \frac{2}{t}y' + e^ty = 0$, όπου οι συναρτ. $p(t) = \frac{2}{t}$, $q(t) = e^t$ είναι συνεχείς $\forall t>0$.

Έτσι, από το Θεώρημα του Abel, είναι

$$W(y_1,y_2)(t) = c\exp\left(-\int p(t)dt\right) = c\exp\left(-\int\frac{2}{t}dt\right) = c\exp(-2\ln t)$$
$$= c\exp(\ln t^{-2}) \Rightarrow \boxed{W(y_1,y_2)(t) = \frac{c}{t^2}}$$

Από την αρχική συνθήκη, έχουμε

$W(y_1,y_2)(1) = 2 \Rightarrow \frac{c}{1^2} = 2 \Rightarrow c=2$, οπότε $W(y_1,y_2)(t) = \frac{2}{t^2}$

και συνεπώς

$W(y_1,y_2)(5) = \frac{2}{5^2} = \frac{2}{25}$ που είναι το ζητούμενο. //

6.170/26 | $y''+2ay'+(a+1)y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(α) Η αντίστοιχη χαρακτ/κή εξ/σ. της Δ.Ε. είναι $r^2+2ar+(a+1)=0$
με $\Delta = 4a^2-4(a^2+1) = -4<0$ και ρίζες $r_{1,2}=\frac{-2a\pm i\sqrt{4}}{2} = -a\pm i$,
οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t)=c_1e^{-at}\cos t + c_2e^{-at}\sin t$$

(με $y'(t)=e^{-at}[c_1(-a\cos t-\sin t)+c_2(\cos t-a\sin t)]$)

Έτσι, οι αρχικές συνθήκες δίνουν

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ -ac_1+c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=1 \\ c_2=a \end{cases}$$

Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$y(t)=e^{-at}(\cos t+a\sin t) = \sqrt{1+a^2}\,e^{-at}\cos(t-\phi),\quad \phi=\tan^{-1}(a).$$

(β) Στη γενική περίπτωση, έχουμε

$$|y(t)| = \sqrt{1+a^2}\,e^{-at}\,|\cos(t-\phi)| \le \sqrt{1+a^2}\,e^{-at}$$ (διότι $|\cos t|\le 1, \forall t$)

οπότε

$$|y(t)|<0{,}1 \Rightarrow \sqrt{1+a^2}\,e^{-at} \le \frac{1}{10} \Rightarrow e^{at} \ge 10\sqrt{1+a^2} \Rightarrow$$

$$at \ge \ln(10\sqrt{1+a^2}) \Rightarrow \boxed{t \ge \frac{1}{a}\ln(10\sqrt{1+a^2})}$$

Έτσι, για $a=1$ είναι $t\ge \ln(10\sqrt{2})$, οπότε $T\le \ln(10\sqrt{2})$.

Χρησιμοποιώντας, τώρα, στη Matlab αρχικά τις εντολές

```
t = linspace (0, log(10*sqrt(2)),100)
y = abs(exp(-t).*(cos(t)+sin(t)))
```

διαπιστώνουμε ότι (δεδομένου ότι $|y(t)|<0.1$), το μικρότερο T τέτοιο, ώστε $t>T$ περιορίζεται στο διάστημα $[1.8731, 1.8999]$.

Χρησιμοποιώντας, πάλι, στη Matlab τις εντολές

```
t = linspace (1.8731, 1.8999, 60)
y = abs(exp(-t).*(cos(t)+sin(t)))
```

διαπιστώνουμε ότι η ζητούμενη τιμή είναι $T\approx 1.8763$.

(γ) Στη γενική περίπτωση είναι $T\le \frac{1}{a}\ln(10\sqrt{1+a^2})$. Οπότε

i) $a=\frac{1}{4}$: $T_{1/4}\le 4\ln\left(\frac{5}{2}\sqrt{17}\right)$ ⇝ `t = linspace(0, 4*log(2.5*sqrt(17)),100);`

ii) $a=1/2$: $T_{1/2}\le 2\ln(5\sqrt{5})$ ⇝ `t = linspace (0, 2*log(5*sqrt(5)),100);`

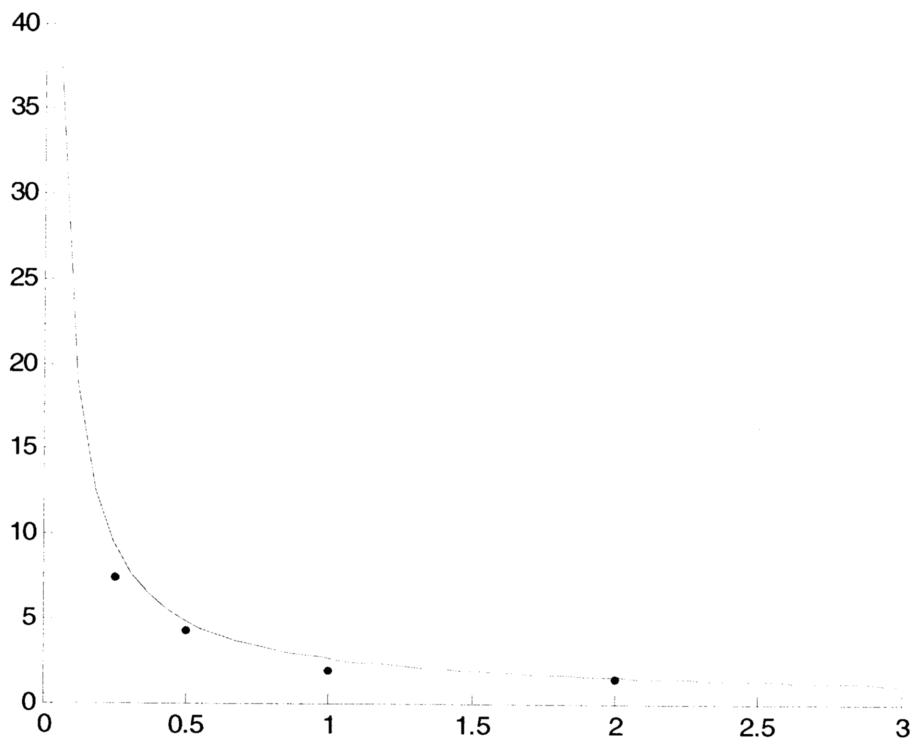
iii) $a=2$: $T_2\le \frac{1}{2}\ln(10\sqrt{5})$ ⇝ `t = linspace (0,10*log(sqrt(5)),100);`

και χρησιμοποιώντας ανάλογα τις εντολές της Matlab (όπως στο (β)), προκύπτει ότι $T_{1/4}\approx 7.4284$, $T_{1/2}\approx 4.3003$, $T_2\approx 1.5116$.

(δ) Χρησιμοποιώντας στη Matlab τις εντολές

```
a = linspace(0,3,50);
t = a.^(-1).*log(10*sqrt(1+a.^2));
plot(a,t)
```

προκύπτει το γράφημα



6.182/37 $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0.25)y = 0$, $x>0$, $y_1(x) = x^{-1/2}\sin x$

$\boxed{x>0} \Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{1}{4}x^{-2}\right)y = 0$, όπου οι συναρτήσεις

$p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-2}$ είναι συνεχείς για $x>0$.

Έτσι, από το Θεώρ. του Abel, η ορίζουσα Wronski για δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1, y_2 της Δ.Ε. είναι

$$W(y_1,y_2) = c\exp\left(-\int p(x)\,dx\right) = c\exp\left(-\int \frac{1}{x}dx\right) = \frac{c}{x}$$

Επειδή (από την άσκηση 33) δύο λύσεις της Δ.Ε. ικανοποιούν την εξίσωση $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W(y_1,y_2)}{y_1^2}$, αντικαθιστώντας λαμβάνουμε

$$\left(\frac{y_2}{x^{-1/2}\sin x}\right)' = \frac{c\,\cancel{x}^{-1}}{\cancel{x}^{-1}\sin^2 x} \Rightarrow \frac{y_2}{x^{-1/2}\sin x} = c\int\frac{dx}{\sin^2 x} = c(-\cot x) \Rightarrow$$

$$y_2(x) = c(-\cot x)x^{-1/2}\sin x \Rightarrow y_2(x) = (-c)x^{-1/2}\cos x,$$

όπου για $c=-1$, παίρνουμε τη λύση $\boxed{y_2(x) = x^{-1/2}\cos x}$

6.193/25 $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2+1)\sin 2t + 3e^{-t}\cos t + 4e^t$ (Δ.Ε.)

(α) Η ομογενής Δ.Ε. $(y''+3y'+2y=0)$ έχει αντίστ. χαρακτ/κή εξίσ.

$r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r+1)(r+2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = -2$.

Έτσι, η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Επειδή, τώρα, καμία από τις συναρτήσεις στο δεξί μέλος της Δ.Ε. δεν είναι λύση της ομογενούς Δ.Ε., συμπεραίνουμε ότι η μορφή μιας μερικής λύσης της Δ.Ε. είναι η εξής:

$$Y(t) = e^t(A_0t^2 + A_1t + A_2)\sin 2t + e^t(B_0t^2 + B_1t + B_2)\cos 2t +$$
$$+ e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + De^t.$$

Θέτουμε $Y_1(t) = e^t[(A_0t^2 + A_1t + A_2)\sin 2t + (B_0t^2 + B_1t + B_2)\cos 2t]$ και υπολογίζουμε

$$Y_1'(t) = e^t\{[(A_0 - 2B_0)t^2 + (A_1 + 2A_0 - 2B_1)t + (A_2 + A_1 - 2B_2)]\sin 2t +$$
$$+ [(2A_0 + B_0)t^2 + (2A_1 + B_1 + 2B_0)t + (2A_2 + B_1 + B_2)]\cos 2t\},$$

$$Y_1''(t) = e^t\{[(4A_0 - 3B_0)t^2 + (4A_1 + 8A_0 - 3B_1 + 4B_0)t + (4A_2 + 4A_1 + 2B_1 + 2B_0 - 3B_2)]\cos 2t$$
$$+ [(-3A_0 - 4B_0)t^2 + (4A_0 - 3A_1 - 4B_1 - 8B_0)t + (2A_0 + 2A_1 - 3A_2 - 4B_2 - 4B_1)]\sin 2t\}$$

οπότε, έχουμε

$$Y_1''(t)+3Y_1'(t)+2Y_1(t)=e^t\,(t^2+1)\sin 2t \Rightarrow$$

$$e^t\Big\{\big[(10A_0+2B_0)t^2+(10A_1+8A_0+10B_0+2B_1)t+(10A_2+4A_1+5B_1+2B_0-B_2)\big]\cos 2t+$$
$$+\big[(-10B_0+2A_0)t^2+(10A_0-10B_1+2A_1-8B_0)t+(5A_1+2A_2+2A_0-4B_2-4B_1)\big]\sin 2t\Big\}=$$
$$=e^t\,(t^2+1)\sin 2t \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-10B_0+2A_0=1\\ 2B_0+10A_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(-10)(-5A_0)+2A_0=1\\ B_0=-5A_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{A_0=1/52}\\ \boxed{B_0=-5/52}\end{cases}$$

$$\begin{cases}10A_1+8A_0+10B_0+2B_1=0\\ 10A_0-10B_1+2A_1-8B_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10A_1+2B_1=42/52\\ 2A_1-10B_1=-50/52\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10A_1+2B_1=42/52\\ -10A_1+50B_1=250/52\end{cases}\overset{(+)\cdots}{\Rightarrow}\begin{cases}\boxed{A_1=\frac{10}{169}}\\ \boxed{B_1=\frac{73}{676}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}10A_2-B_2+4A_1+5B_1+2B_0=0\\ 2A_2-4B_2+5A_1+2A_0-4B_1=1\end{cases}\Rightarrow\cdots\begin{cases}\boxed{A_2=-1233/35152}\\ \boxed{B_2=-4105/35152}\end{cases}$$

Θέτουμε $Y_2(t)=e^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$ και υπολογίζουμε

$$Y_2'(t)=e^{-t}\big[(C_2-C_1)\cos t+(-C_1-C_2)\sin t\big],$$
$$Y_2''(t)=e^{-t}\big[(-2C_2)\cos t+(2C_1)\sin t\big]$$

οπότε

$$Y_2''(t)+3Y_2'(t)+2Y_2(t)=3e^{-t}\cos t\Rightarrow$$
$$e^{-t}\big[(C_2-C_1)\cos t+(C_2+C_1)\sin t\big]=3e^{-t}\cos t\Rightarrow$$
$$\begin{cases}C_2-C_1=3\\ C_1+C_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=-C_2\\ 2C_2=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{C_1=-3/2}\\ \boxed{C_2=3/2}\end{cases}$$

Τέλος, θέτουμε $Y_3(t)=De^t$ με $Y_3'(t)=Y_3''(t)=De^t$, οπότε

$$Y_3''(t)+3Y_3'(t)+2Y_3(t)=4e^t\Rightarrow 6D\,e^t=4e^t\Rightarrow 6D=4\Rightarrow\boxed{D=2/3}$$

6.200/14 $t^2y''-t(t+2)y'+(t+2)y=2t^3,\ t>0,\ y_1(t)=t,\ y_2(t)=te^t$

Υπολογίζουμε

$$y_1'(t)=1,\quad y_1''(t)=0,\quad y_2'(t)=(t+1)e^t,\quad y_2''(t)=(t+2)e^t,$$

οπότε

$$t^2y_1''(t)-t(t+2)y_1'(t)+(t+2)y_1(t)=t^2\cdot 0-t\cancel{(t+2)}\,1+\cancel{(t+2)}\,t=0$$

$\rightsquigarrow$ η y_1 επαληθεύει την αντίστοιχη ομογενή Δ.Ε.

και

$$t^2y_2''(t)-t(t+2)y_2'(t)+(t+2)y_2(t)=t^2(t+2)e^t-t(t+2)(t+1)e^t+(t+2)te^t$$
$$=t(t+2)e^t\,[\cancel{t}-(\cancel{t}+1)+1]$$
$$=t(t+2)e^t\,(\cancel{1}-\cancel{1})=0$$

Δηλαδή και η y_2 επαληθεύει την αντιστ. ομογενή Δ.Ε.

Επιπλέον, η ορίζουσα Wronski των y_1, y_2 είναι

$$W(y_1,y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & te^t \\ 1 & (t+1)e^t \end{vmatrix} = t(t+\cancel{1})e^t - \cancel{te^t} = t^2e^t \neq 0,$$
$\forall t>0$.

Εφόσον $t>0$, διαιρώντας την Δ.Ε. με t^2, παίρνουμε

$$y'' - \left(1+\frac{2}{t}\right)y' + \left(\frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}\right)y = 2t,$$

(δηλ. μετατρέψαμε τη Δ.Ε. στη μορφή $y''+p(t)y'+q(t)y=g(t)$)

όπου οι συναρτήσεις $p(t) = -\left(1+\frac{2}{t}\right)$, $q(t) = \frac{1}{t}+\frac{2}{t^2}$, $g(t)=2t$ είναι συνεχείς για $t>0$.

Έτσι, από το Θεώρημα 3.7.1. έπεται ότι μια μερική λύση της δοθείσας Δ.Ε. είναι η

$$Y(t) = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)\,g(t)}{W(y_1,y_2)(t)} + y_2(t)\int \frac{y_1(t)\cdot g(t)}{W(y_1,y_2)(t)}\,dt$$

$$\Rightarrow Y(t) = -t\int \frac{\cancel{te^t}\,(2\cancel{t})}{\cancel{t^2 e^t}}\,dt + te^t\int \frac{\cancel{t}\,(2\cancel{t})}{\cancel{t^2}e^t}\,dt$$

$$\Rightarrow Y(t) = -2t\int dt + 2te^t\int e^{-t}\,dt$$
$$= -2t^2 + 2te^t(-e^{-t})$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(t) = -2t^2-2t}$$

(Πράγματι κάνοντας την επαλήθευση, έχουμε $Y'(t) = -4t-2$, $Y''(t) = -4$)

$$t^2Y''(t) - t(t+2)Y'(t) + (t+2)Y(t) = t^2(-4) - (t^2+2t)(-4t-2) + (t+2)(-2t^2-2t)$$
$$= -4t^2 + (t^2+2t)(4t+\cancel{2}) - (t^2+2t)(2t+\cancel{2})$$
$$= -4t^2 + 2t(t^2+2t)$$
$$= -4\cancel{t^2} + 2t^3 + 4\cancel{t^2} = 2t^3$$

$$\Rightarrow t^2Y''(t) - t(t+2)Y'(t) + (t+2)Y(t) = 2t^3,$$

δηλ. η μερική λύση $Y(t)$ ικανοποιεί την μη ομογενή Δ.Ε.)