# 3η Σειρά Ασκήσεων

σ245/38) $y^{iv} - y = 0$ (Δ.Ε)

(α) Η αντίστοιχη χαρακτ/κή εξίσωση της Δ.Ε. είναι

$$r^4 - 1 = 0 \Rightarrow (r^2-1)(r^2+1) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 1, \quad r_{3,4} = \pm i,$$

οπότε η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t$$

Θέτοντας $y^{iv} + p_1(t) y''' + p_2(t) y'' + p_3(t) y' + p_4(t) y = y^{iv} - y$, παρατηρούμε ότι $p_1(t) = 0$ και συνεπώς, η ορίζουσα Wronski ενός θεμελιώδους συνόλου λύσεων της δοθείσας εξίσωσης είναι

$$W(t) = c\exp\left(-\int p_1(t)\,dt\right) = c\exp(0) \Rightarrow \boxed{W(t) = c}$$

(β) Η ορίζουσα Wronski των λύσεων $e^{t}, e^{-t}, \cos t$ και $\sin t$ είναι

$$W(e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} & \cos t & \sin t \\ e^t & -e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ e^t & e^{-t} & -\cos t & -\sin t \\ e^t & -e^{-t} & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} e^t \begin{vmatrix} -e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & \sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{2+1} e^t \begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t & \sin t \\ e^{-t} & -\cos t & -\sin t \\ -e^{-t} & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} e^t \begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t & \sin t \\ -e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ -e^{-t} & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-1)^{4+1} e^t \begin{vmatrix} e^{-t} & \cos t & \sin t \\ -e^{-t} & -\sin t & \cos t \\ e^{-t} & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= e^t \left[ (-1)^{1+1}(-e^{-t}) \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} e^{-t} \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-1)^{3+1}(-e^{-t}) \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \right]$$

$$- e^t \left[ e^{-t} \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - e^{-t} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-e^{-t}) \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \right]$$

$$+ e^t \left[ e^{-t} \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - (-e^{-t}) \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + (-e^{-t}) \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right]$$

$$- e^t \left[ e^{-t} \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} - (-e^{-t}) \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} + e^{-t} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right]$$

$$= -e^{\cancel{t-t}} (\overbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}^{=1}) - e^{\cancel{t-t}} (\overbrace{\sin t \cancel{\cos t} - \cancel{\sin t} \cos t}^{=0}) - e^{\cancel{t-t}} (\overbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}^{=1})$$

$$- e^{\cancel{t-t}} (\cos^2 t + \sin^2 t) + e^{\cancel{t-t}} (-\cos^2 t - \sin^2 t) + e^{\cancel{t-t}} (-\sin t \cancel{\cos t} + \sin t \cancel{\cos t})$$

$$+ e^0 (\sin t \cancel{\cos t} - \sin t \cancel{\cos t}) + e^0 (-\cos^2 t - \sin^2 t) - e^0 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$- e^0 (\sin^2 t + \cos^2 t) - e^0 (-\sin t \cancel{\cos t} + \sin t \cancel{\cos t}) - e^0 (\cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= -1 - 0 - 1 - 1 - 1 + 0 + 0 - 1 - 1 - 1 - 0 - 1 \Rightarrow \boxed{W(e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t) = -8}$$

(δ) Είναι $\cosh t = \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})$ με $(\cosh t)' = \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t}) = \sinh t$ και $(\sinh t)' = \frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t}) = \cosh t$. Έτσι, έχουμε

$$W(\cosh t, \sinh t, \cos t, \sin t) = \begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t & \cos t & \sin t \\ \sinh t & \cosh t & -\sin t & \cos t \\ \cosh t & \sinh t & -\cos t & -\sin t \\ \sinh t & \cosh t & \sin t & -\cos t \end{vmatrix}$$

$$= \cosh t \begin{vmatrix} \cosh t & -\sin t & \cos t \\ \sinh t & -\cos t & -\sin t \\ \cosh t & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - \sinh t \begin{vmatrix} \sinh t & \cos t & \sin t \\ \sinh t & -\cos t & -\sin t \\ \cosh t & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} +$$

$$+ \cosh t \begin{vmatrix} \sinh t & \cos t & \sin t \\ \cosh t & -\sin t & \cos t \\ \cosh t & \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - \sinh t \begin{vmatrix} \sinh t & \cos t & \sin t \\ \cosh t & -\sin t & \cos t \\ \sinh t & -\cos t & -\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \cosh t \left( \cosh t \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - \sinh t \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + \cosh t \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \right)$$

$$- \sinh t \left( \sinh t \begin{vmatrix} -\cos t & -\sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - \sinh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + \cosh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \right)$$

$$+ \cosh t \left( \sinh t \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} - \cosh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{vmatrix} + \cosh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right)$$

$$- \sinh t \left( \sinh t \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} - \cosh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} + \sinh t \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} \right)$$

$$= \cosh^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) - \cosh t \sinh t(\sin t \cancel{\cos t} - \sin t \cancel{\cos t}) + \cosh^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)$$
$$- \sinh^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sinh^2 t(-\cos^2 t - \sin^2 t) - \sinh t \cosh t(-\sin t \cancel{\cos t} + \sin t \cancel{\cos t})$$
$$+ \cosh t \sinh t(\sin t \cancel{\cos t} - \sin t \cancel{\cos t}) - \cosh^2 t(-\cos^2 t - \sin^2 t) + \cosh^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$- \sinh^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t) + \sinh t \cosh t(-\cos t \cancel{\sin t} + \cancel{\cos t} \sin t) - \sinh^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= \cosh^2 t - 0 + \cosh^2 t - \sinh^2 t - \sinh^2 t - 0 + 0 + \cosh^2 t + \cosh^2 t$$
$$- \sinh^2 t + 0 - \sinh^2 t = 4(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = 4 \cdot 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{W(\cosh t, \sinh t, \cos t, \sin t) = 4}$$

(διότι είναι:

$$\left.\begin{aligned} \cosh^2 t &= \frac{1}{4}(e^{2t}+2+e^{-2t}) \\ \sinh^2 t &= \frac{1}{4}(e^{2t}-2+e^{-2t}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{1}{4}(\cancel{e^{2t}}+2+\cancel{e^{-2t}}-\cancel{e^{2t}}+2-\cancel{e^{-2t}}) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1}\ )$$

σ. 250/12.) $y^{iv}+2y'''+y''+8y'-12y=12\sin t-e^{-t}$, (E) (2)

$y(0)=3,\ y'(0)=0,\ y''(0)=-1,\ y'''(0)=2$

Η χαρακτ/κή εξίσωση της αντίστ. ομογενούς Δ.Ε. είναι

$r^4+2r^3+r^2+8r-12=0$

και για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(r)=r^4+2r^3+r^2+8r-12$, παρατηρούμε ότι $p(1)=0$, δηλ. $r_1=1$ ρίζα. Έτσι, υπολογίζουμε

$$\begin{array}{l|l} \cancel{r^4}+2r^3+r^2+8r-12 & r-1 \\ \cline{2-2} -\cancel{r^4}+r^3 & r^3+3r^2+4r+12 \\ \hline 3r^3+r^2+8r-12 & \\ -3r^3+3r^2 & \\ \hline 4r^2+8r-12 & \\ -4r^2+4r & \\ \hline 12r-12 & \\ -12r+12 & \\ \hline 0 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l} r^3+3r^2+4r+12 & r+3 \\ \cline{2-2} -r^3-3r^2 & r^2+4 \\ \hline 4r+12 & \\ -4r-12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

οπότε $p(r)=(r-1)(r^3+3r^2+4r+12)$ με $p(-3)=(-4)\cdot 0=0$, δηλ. $r_2=-3$ ρίζα. Επομένως $p(r)=(r-1)(r+3)(r^2+4)$, δηλ. η χαρακτ/κή εξίσωση $(r-1)(r+3)(r^2+4)=0$ έχει ρίζες τις $r_1=1,\ r_2=-3,\ r_{3,4}=\pm 2i$

Άρα, η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y(t)=c_1e^{t}+c_2e^{-3t}+c_3\cos 2t+c_4\sin 2t$$

Τώρα, θα αναζητήσουμε μια μερική λύση $Y(t)$ της (E). Παρατηρώντας το δεξί μέλος $g(t)=12\sin t-e^{-t}$ της (E), επειδή οι $r_5=-1,\ r_6=i,\ r_7=-i$ ΔΕΝ είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσ., υποθέτουμε ότι μια μερική λύση είναι η

$Y(t)=Ae^{-t}+B\cos t+C\sin t$ με

$Y'(t)=-Ae^{-t}-B\sin t+C\cos t$, $Y''(t)=Ae^{-t}-B\cos t-C\sin t$,

$Y'''(t)=-Ae^{-t}+B\sin t-C\cos t$, $Y^{iv}(t)=Ae^{-t}+B\cos t+C\sin t=Y(t)$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην (E), παίρνουμε

$2(-Ae^{-t}+B\sin t-C\cos t)+(Ae^{-t}-B\cos t-C\sin t)+8(-Ae^{-t}-B\sin t+C\cos t)$

$-11(Ae^{-t}+B\cos t+C\sin t)=12\sin t-e^{-t}\Rightarrow$

$(-2A+A-8A-11A)e^{-t}+(2B-C-8B-11C)\sin t+(-2C-B+8C-11B)\cos t=$

$=12\sin t-e^{-t}\Rightarrow$

$(-20A)e^{-t}+(-6B-12C)\sin t+(-12B+6C)\cos t=12\sin t-e^{-t}$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των όμοιων όρων, προκύπτει ότι

$$\begin{cases} -20A=-1 \\ -6B-12C=12 \\ -12B+6C=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1/20 \\ B+2C=-2 \\ C=2B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ 5B=-2 \\ C=2B \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} A=1 \\ B=-2/5 \\ C=-4/5 \end{cases}$$

Οπότε, μια μερική λύση είναι η

$$Y(t)=\frac{1}{20}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos t-\frac{4}{5}\sin t$$

και τότε, η γενική λύση της (E) είναι η

$$y(t) = y_c(t) + Y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t + \frac{1}{20} e^{-t} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t$$

με

$$y'(t) = c_1 e^{t} - 3c_2 e^{-3t} - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t - \frac{1}{20} e^{-t} + \frac{2}{5}\sin t - \frac{4}{5}\cos t,$$

$$y''(t) = c_1 e^{t} + 9c_2 e^{-3t} - 4c_3 \cos 2t - 4c_4 \sin 2t + \frac{1}{20} e^{-t} + \frac{2}{5}\cos t + \frac{4}{5}\sin t,$$

$$y'''(t) = c_1 e^{t} - 27c_2 e^{-3t} + 8c_3 \sin 2t - 8c_4 \cos 2t - \frac{1}{20} e^{-t} - \frac{2}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t$$

Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στις τελευταίες σχέσεις, έχουμε

$$\begin{cases} y(0)=3 \\ y'(0)=0 \\ y''(0)=-1 \\ y'''(0)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{20} - \frac{2}{5} = 3 \\ c_1 - 3c_2 + 2c_4 - \frac{1}{20} - \frac{4}{5} = 0 \\ c_1 + 9c_2 - 4c_3 + \frac{1}{20} + \frac{2}{5} = -1 \\ c_1 - 27c_2 - 8c_4 - \frac{1}{20} + \frac{4}{5} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = \frac{67}{20} \\ c_1 - 3c_2 + 2c_4 = \frac{17}{20} \\ c_1 + 9c_2 - 4c_3 = -\frac{29}{20} \\ c_1 - 27c_2 - 8c_4 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{81}{40} \\ c_2 = \frac{73}{520} \\ c_3 = \frac{77}{65} \\ c_4 = -\frac{49}{130} \end{cases}$$

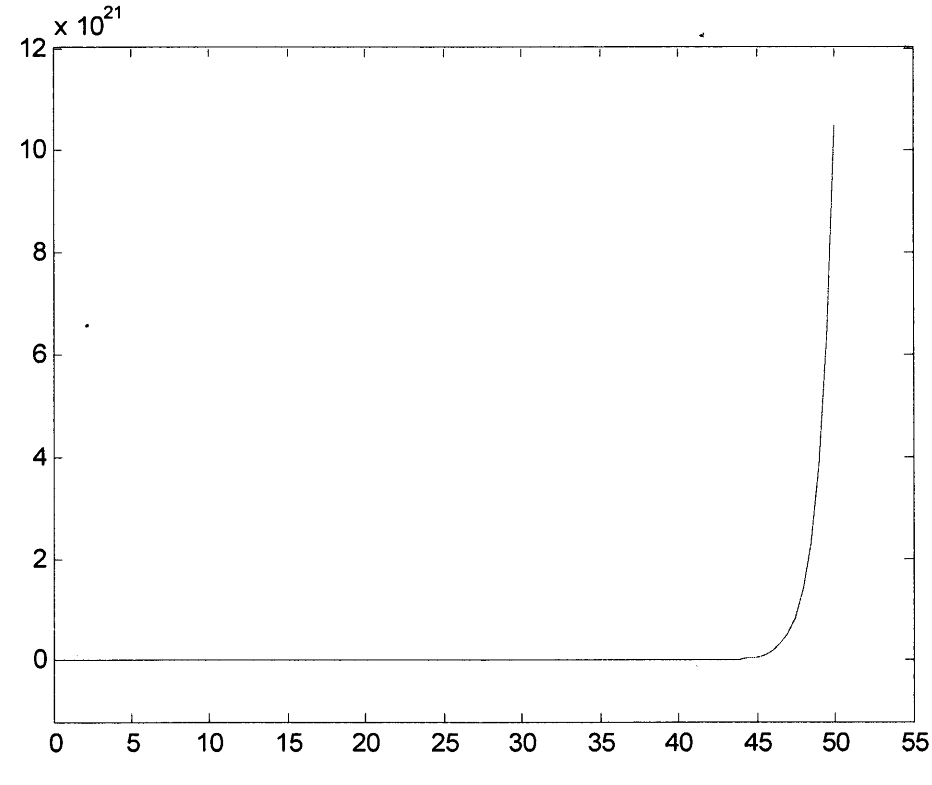
Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\boxed{y(t) = \frac{81}{40} e^{t} + \frac{73}{520} e^{-3t} + \frac{77}{65}\cos 2t - \frac{49}{130}\sin 2t + \frac{1}{20} e^{-t} - \frac{2}{5}\cos t - \frac{4}{5}\sin t}$$

Πληκτρολογώντας στη γραμμή εντολών της Matlab τις ακόλουθες εντολές:

```
t=linspace(0,50,100);
y=(81/40)*exp(t)+(73/520)*exp((-3)*t)+(77/65)*cos(2*t)-
(49/130)*sin(2*t)+(1/20)*exp(-t)-(2/5)*cos(t)-(4/5)*sin(t);
plot(t,y);
axis([0 55 -12*10^20 12*10^21])
```

προκύπτει το ζητούμενο γράφημα



6.255/3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$ (E)

Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση της (E) είναι

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0 \Rightarrow (r-1)(r^2 - r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = -1,\ r_2 = 1,\ r_3 = 2$,

οπότε η γενική λύση της ομογενούς Δ.Ε. που προκύπτει από την (E), είναι

$$y_c(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t}$$

Για να βρούμε, τώρα, μια μερική λύση χρησιμοποιώντας την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & e^{t} & 2e^{2t} \\ e^{-t} & e^{t} & 4e^{2t} \end{vmatrix} = e^{-t}\begin{vmatrix} e^{t} & 2e^{2t} \\ e^{t} & 4e^{2t} \end{vmatrix} - (-e^{-t})\begin{vmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 4e^{2t} \end{vmatrix} + e^{-t}\begin{vmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} \end{vmatrix}$$

$$= e^{-t}(4e^{3t} - 2e^{3t}) + e^{-t}(4e^{3t} - e^{3t}) + e^{-t}(2e^{3t} - e^{3t})$$

$$= e^{-t}(2e^{3t} + 3e^{3t} + e^{3t}) = e^{-t}(6e^{3t}) \Rightarrow \boxed{W(t) = 6e^{2t}},$$

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & e^{t} & e^{2t} \\ 0 & e^{t} & 2e^{2t} \\ 1 & e^{t} & 4e^{2t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{3t} - e^{3t} \Rightarrow \boxed{W_1(t) = e^{3t}},$$

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ -e^{-t} & 0 & 2e^{2t} \\ e^{-t} & 1 & 4e^{2t} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} e^{-t} & e^{2t} \\ -e^{-t} & 2e^{2t} \end{vmatrix} = -(2e^{t} + e^{t}) \Rightarrow \boxed{W_2(t) = -3e^{t}},$$

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t} & 0 \\ -e^{-t} & e^{t} & 0 \\ e^{-t} & e^{t} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-t} & e^{t} \\ -e^{-t} & e^{t} \end{vmatrix} = 1 + 1 \Rightarrow \boxed{W_3(t) = 2}$$

Θέτοντας $g(t) = e^{4t}$, μια μερική λύση της (E) είναι η εξής

$$Y(t) = e^{-t}\int \frac{g(t)\,W_1(t)}{W(t)}\,dt + e^{t}\int \frac{g(t)\,W_2(t)}{W(t)}\,dt + e^{2t}\int \frac{g(t)\,W_3(t)}{W(t)}\,dt$$

$$= e^{-t}\int \frac{e^{4t}\,e^{3t}}{6e^{2t}}\,dt + e^{t}\int \frac{e^{4t}(-3e^{t})}{6e^{2t}}\,dt + e^{2t}\int \frac{e^{4t}\,2}{6e^{2t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}e^{-t}\int e^{5t}\,dt - \frac{1}{2}e^{t}\int e^{3t}\,dt + \frac{1}{3}e^{2t}\int e^{2t}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}e^{-t}\left(\frac{e^{5t}}{5}\right) - \frac{1}{2}e^{t}\left(\frac{e^{3t}}{3}\right) + \frac{1}{3}e^{2t}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{30} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cancel{\frac{1}{6}}\right)e^{4t} \Rightarrow \boxed{Y(t) = \frac{1}{30}e^{4t}}$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (E) είναι η

$$y(t) = y_c(t) + Y(t) \Rightarrow \boxed{y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{30}e^{4t}}$$

6.256/13) $\quad x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \; x>0 \qquad (E)$

$$\Rightarrow \quad y''' + \frac{1}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = \underbrace{\boxed{2x}}_{g(x)}, \quad x>0$$

Εφόσον οι $x, x^2, 1/x$ είναι λύσεις της αντίστ. ομογενούς Δ.Ε., η ορίζουσα Wronski είναι (γι' αυτές τις λύσεις)

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 1/x \\ 1 & 2x & -1/x^2 \\ 0 & 2 & 2/x^3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 2x & -1/x^2 \\ 2 & 2/x^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & 1/x \\ 2 & 2/x^3 \end{vmatrix} = x\left(\frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) - \left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{x}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{W(x) = \frac{6}{x}}$$

Επιπλέον, υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & 1/x \\ 0 & 2x & -1/x^2 \\ 1 & 2 & 2/x^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & 1/x \\ 2x & -1/x^2 \end{vmatrix} = -1-2 \Rightarrow \boxed{W_1(x) = -3},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1/x \\ 1 & 0 & -1/x^2 \\ 0 & 1 & 2/x^3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix} = -\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) \Rightarrow \boxed{W_2(x) = \frac{2}{x}},$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 \Rightarrow \boxed{W_3(x) = x^2}$$

Επειδή $x>0$, σύμφωνα με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, μια μερική λύση της (E) είναι η εξής

$$Y(x) = x\int_0^x \frac{g(s)\,W_1(s)}{W(s)}\,ds + x^2\int_0^x \frac{g(s)\,W_2(s)}{W(s)}\,ds + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(s)\,W_3(s)}{W(s)}\,ds$$

$$= x\int_0^x \frac{\cancel{2}s\,(-\cancel{3})}{\frac{\cancel{6}}{s}}\,ds + x^2\int_0^x \frac{2s\,(2/\cancel{s})}{6/\cancel{s}}\,ds + \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\cancel{2}s\cdot s^2}{\frac{\cancel{6}\,3}{s}}\,ds$$

$$= -x\int_0^x s^2\,ds + \frac{2}{3}x^2\int_0^x s\,ds + \frac{1}{3x}\int_0^x s^4\,ds$$

$$= -x\left[\frac{s^3}{3}\right]_0^x + \frac{2}{3}x^2\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x + \frac{1}{3x}\left[\frac{s^5}{5}\right]_0^x$$

$$= -x\left(\frac{x^3}{3} - 0\right) + \frac{2}{3}x^2\left(\frac{x^2}{2} - 0\right) + \frac{1}{3x}\left(\frac{x^5}{5} - 0\right)$$

$$= -\cancel{\frac{x^4}{3}} + \cancel{\frac{1}{3}x^4} + \frac{1}{15}x^4$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(x) = \frac{x^4}{15}}$$ που είναι η ζητούμενη μερική λύση της (E).

6.346/21) $y'' - 2y' + 2y = \cos t \; , \; y(0) = 1 \; , \; y'(0) = 0$

Εφαρμόζοντας μετ/σμό Laplace στη Δ.Ε., παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{y''\} - 2\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos t\} \Rightarrow s^2 Y(s) - s y(0) - \overset{0}{y'(0)} - 2\left(sY(s) - y(0)\right)$$

$$+ 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow (s^2 - 2s + 2)Y(s) - s + 2 = \frac{s}{s^2+1} \Rightarrow$$

$$(s^2 - 2s + 2)Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + s - 2 \Rightarrow (s^2 - 2s + 2)Y(s) = \frac{s + (s-2)(s^2+1)}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^3 - 2s^2 + 2s - 2}{(s^2+1)(s^2-2s+2)}$$

πολυώνυμο 2ου βαθμού με μιγαδικές ρίζες

Αναζητούμε $a, b, c, d$ τ.ω.

$$Y(s) = \frac{as+b}{s^2+1} + \frac{cs+d}{s^2-2s+2} = \frac{(as+b)(s^2-2s+2) + (cs+d)(s^2+1)}{(s^2+1)(s^2-2s+2)} \; ,$$

οπότε

$$(as+b)(s^2-2s+2) + (cs+d)(s^2+1) = s^3 - 2s^2 + 2s - 2 \Rightarrow$$

$$(a+c)s^3 + (b - 2a + d)s^2 + (2a - 2b + c)s + (2b + d) = s^3 - 2s^2 + 2s - 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b - 2a + d = -2 \\ 2a - 2b + c = 2 \\ 2b + d = -2 \end{cases} \xRightarrow{\boxed{a+c=1}} \begin{cases} a - 2b = 1 \\ -2a - b = 0 \\ c = 1 - a \\ d = -2b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a = 1 \\ b = -2a \\ c = 1 - a \\ d = -2b - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/5 \\ b = -2/5 \\ c = 4/5 \\ d = -6/5 \end{cases}$$

Έτσι, είναι

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left[\frac{s-2}{s^2+1} + \frac{4s-6}{(s-1)^2+1}\right] = \frac{1}{5}\left[\frac{s}{s^2+1} - 2\frac{1}{s^2+1} + 4\frac{s-1}{(s-1)^2+1} - 2\frac{1}{(s-1)^2+1}\right]$$

και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετ/σμό Laplace, προκύπτει

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{5}\left(\cos t - 2\sin t + 4e^t \cos t - 2e^t \sin t\right)}$$

που είναι η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ.

(Παρατ.: Η παραπάνω λύση προέκυψε χρησιμοποιώντας τους τύπους

i) $\mathcal{L}\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$

ii) $\mathcal{L}\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$

iii) $\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

iv) $\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\} = \dfrac{b}{(s-a)^2+b^2}$

v) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$ ).

σ.346/23) $y''+2y'+y=4e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$

Εφαρμόζοντας μετ/σμό Laplace στη Δ.Ε., παίρνουμε

$$\mathcal{L}\{y''\}+2\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{y\}=4\mathcal{L}\{e^{-t}\} \qquad \left(\mathcal{L}\{e^{at}\}=\frac{1}{s-a}\right) \Rightarrow$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+2\big(sY(s)-y(0)\big)+Y(s)=\frac{4}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s^2+2s+1)Y(s)-2s+1-2\cdot 2=\frac{4}{s+1} \Rightarrow$$

$$(s+1)^2Y(s)=\frac{4}{s+1}+2s+3 \Rightarrow Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2s+3}{(s+1)^2} \Rightarrow$$

$$Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2(s+1)+1}{(s+1)^2} \Rightarrow Y(s)=\frac{4}{(s+1)^3}+\frac{2}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

Επειδή $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}=F(s-c)$, είναι $\left(\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}=e^{ct}f(t)\right)$
για $c=-1$:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=e^{-t}t^0=e^{-t} \quad \left(\text{διότι } \mathcal{L}\{t^p\}=\frac{p!}{s^{p+1}},\ p>-1\right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=e^{-t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=e^{-t}t^1=te^{-t},$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\;}{(s+1)^3}\right\}=e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\;}{s^3}\right\}=e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^3}\right\}=e^{-t}t^2.$$

Συνεπώς, εφαρμόζοντας αντίστροφο μετ/σμό Laplace στην $Y(s)$, προκύπτει

$$y(t)=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^3}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t)=2t^2e^{-t}+te^{-t}+2e^{-t}}$$

που είναι η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ.