4η - 5η Σειρά Ασκήσεων

σ.362/3 $y'' + 4y = \sin t - u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

Είναι $g(t) = \sin t - u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) = \begin{cases} \sin t &, t<2\pi \\ \sin t - \sin(t-2\pi) &, t \geq 2\pi \end{cases}$

Εφαρμόζοντας μετ/σμό Laplace στη Δ.Ε., έχουμε

$\boxed{\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs}F(s)}$

$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\} - \mathcal{L}\{u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi)\} \Rightarrow$

$s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^0 - \cancel{y'(0)}^0 + 4Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{(-2\pi)s}\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$

$(s^2+4)Y(s) = \frac{1}{s^2+1} - e^{(-2\pi)s}\frac{1}{s^2+1} \Rightarrow$

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} - e^{(-2\pi)s}\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}} \quad (1)$$

Θέτουμε $H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{Cs+D}{s^2+4} \Rightarrow$

$(As+B)(s^2+4) + (Cs+D)(s^2+1) = 1 \Rightarrow$

$(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (4A+C)s + (4B+D) = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ 4A+C=0 \\ 4B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-A \\ D=-B \\ 3A=0 \\ 3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=C=0 \\ B=1/3 \\ D=-1/3 \end{cases},$$

οπότε $H(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)$

Αντικαθιστώντας, λοιπόν, στην (1) παίρνουμε

$Y(s) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{s^2+2^2}\right) - \frac{1}{3}\left[e^{(-2\pi)s}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right] + \frac{1}{6}\left[e^{(-2\pi)s}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right)\right]$

και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετ/σμό Laplace, προκύπτει

$y(t) = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t - \frac{1}{3}u_{2\pi}(t)\sin(t-2\pi) + \frac{1}{6}u_{2\pi}(t)\sin(2t-2\pi)$

Επειδή, τώρα, είναι $\sin(at-2\pi) = \sin at$, παίρνουμε

$y(t) = \frac{1}{3}[1-u_{2\pi}(t)]\sin t - \frac{1}{6}[1-u_{2\pi}(t)]\sin 2t \Rightarrow$

$\boxed{y(t) = \frac{1}{6}[1-u_{2\pi}(t)](2\sin t - \sin 2t)}$ που είναι η λύση του Π.Α.Τ.

13. $y^{iv} + 5y'' + 4y = 1 - u_\pi(t)$, $y(0)=y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

Η συνάρτηση εξαναγκασμού είναι $g(t) = 1 - u_\pi(t) = \begin{cases} 1, & t<\pi \\ 0, & t\geq\pi \end{cases}$

Από την Δ.Ε., έχουμε

$\mathcal{L}\{y^{iv}\} + 5\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{u_\pi(t)\} \Rightarrow$

$[s^4Y(s) - s^3\cancel{y(0)}^0 - s^2\cancel{y'(0)}^0 - s\cancel{y''(0)}^0 - \cancel{y'''(0)}^0] + 5[s^2Y(s) - s\cancel{y(0)}^0 - \cancel{y'(0)}^0] + 4Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{(-\pi)s}}{s} \Rightarrow$

$(s^4+5s^2+4)Y(s) = \frac{1-e^{(-\pi)s}}{s} \Rightarrow$

$Y(s) = \frac{1-e^{(-\pi)s}}{s(s^4+5s^2+4)} = \frac{1-e^{(-\pi)s}}{s(s^2+1)(s^2+4)}$

Θέτουμε

$$H(s)=\frac{1}{s(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{A}{s}+\frac{B_1 s+B_0}{s^2+1}+\frac{C_1 s+C_0}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$A(s^2+1)(s^2+4)+s(s^2+4)(B_1 s+B_0)+s(s^2+1)(C_1 s+C_0)=1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\dfrac{1}{4} \\ A(s^4+5s^2+1)+s\left[(B_1+C_1)s^3+(B_0+C_0)s^2+(4B_1+C_1)s+(4B_0+C_0)\right]=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=1/4 \\ (A+B_1+C_1)s^4+(B_0+C_0)s^3+(4B_1+C_1+5A)s^2+(4B_0+C_0)s+4A=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A=1/4 \\ B_1+C_1=-1/4 \\ 4B_1+C_1=-5/4 \\ B_0+C_0=0 \\ 4B_0+C_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ -B_1-C_1=1/4 \\ 4B_1+C_1=-5/4 \\ C_0=-B_0 \\ 3B_0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B_0=C_0=0 \\ 3B_1=-1 \\ C_1=-1/4-B_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1/4 \\ B_0=C_0=0 \\ B_1=-1/3 \\ C_1=1/12 \end{cases}$$

Επομένως

$$H(s)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)$$

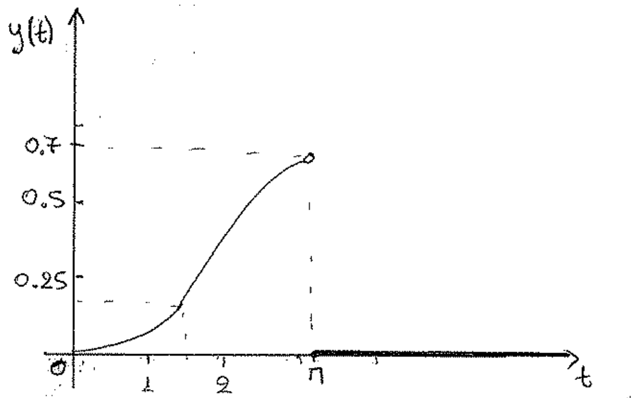
και με αντίστροφο μετ/σμό Laplace, παίρνουμε

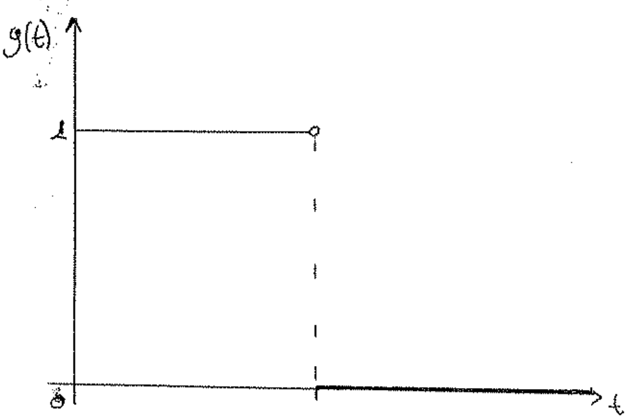
$$h(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cos t+\frac{1}{12}\cos 2t \Rightarrow h(t)=(3-4\cos t+\cos 2t)/12$$

Εφαρμόζοντας, τώρα, αντίστροφο μετ/σμό Laplace στην $Y(s)$, προκύπτει

$\boxed{y(t)=h(t)-u_\pi(t)\cdot h(t)}$ που είναι η λύση του Π.Α.Τ.

Τα ζητούμενα γραφήματα είναι τα ακόλουθα





σ.369/11) $y''+2y'+2y=\cos t+\delta(t-\pi/2)$, $y(0)=0$, $y'(0)$

Εφαρμόζοντας μετ/σμό Laplace στη Δ.Ε., έχουμε

$$\mathcal{L}\{y''+2y'+2y\}=\mathcal{L}\{\cos t+\delta(t-\pi/2)\}\Rightarrow$$

$$\mathcal{L}\{y''\}+2\mathcal{L}\{y'\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{\cos t\}+\mathcal{L}\{\delta(t-\pi/2)\}\xRightarrow{(6.342)}$$

$$s^2Y(s)-s\,\cancelto{0}{y(0)}-\cancelto{0}{y'(0)}+2\left(sY(s)-\cancelto{0}{y(0)}\right)+2Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+e^{-(\pi/2)s}\Rightarrow$$

$$(s^2+2s+2)Y(s)=\frac{s}{s^2+1}+e^{-(\pi/2)s}\Rightarrow\boxed{Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}+\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s^2+2s+2}}$$

Θέτουμε

$$Y_1(s)=\frac{s}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}=\frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+2s+2}\Rightarrow$$

$$(As+B)(s^2+2s+2)+(Cs+D)(s^2+1)=s\Rightarrow$$

$$As^3+2As^2+2As+Bs^2+2Bs+2B+Cs^3+Ds^2+Cs+D=s\Rightarrow$$

$$(A+C)s^3+(2A+B+D)s^2+(2A+2B+C)s+(2B+D)=s\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A+C=0\\2A+B+D=0\\2A+2B+C=1\\2B+D=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-A\\2A-B=0\\A+2B=1\\D=-2B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C=-A\\B=2A\\5A=1\\D=-2B\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=1/5\\B=2/5\\C=-1/5\\D=-4/5\end{cases}$$

οπότε

$$Y_1(s)=\frac{1}{5}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}-\frac{s+4}{(s+1)^2+1}\right]=\frac{1}{5}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{2}{s^2+1}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{3}{(s+1)^2+1}\right]$$

και από τους τύπους του μετ/σμού Laplace

$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin bt\}=\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\quad\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\qquad(6.342)$$

προκύπτει ότι

$$y_1(t)=\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t-\frac{1}{5}e^{-t}\cos t-\frac{3}{5}e^{-t}\sin t$$

Επιπλέον, είναι $F(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}$ με $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)=e^{-t}\sin t$

και λόγω του τύπου $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}=u_c(t)f(t-c)$, έπεται ότι (Θεώρ. 6.3.1) εδώ $c=\pi/$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(\pi/2)s}}{s^2+2s+2}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-(\pi/2)s}}{(s+1)^2+1}\right\}=e^{-(t-\pi/2)}\sin(t-\pi/2)\cdot u_{\pi/2}(t)$$

Άρα, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

$$\boxed{y(t)=\frac{1}{5}\cos t+\frac{2}{5}\sin t-\frac{1}{5}e^{-t}(\cos t+3\sin t)+u_{\pi/2}(t)e^{-(t-\pi/2)}\sin(t-\pi/2)}$$

6.377/19. $y^{iv}+5y''+4y=g(t)$, $y(0)=1$, $y'(0)=y''(0)=y'''(0)=0$

Χρησιμοποιώντας μετ/σμό Laplace, η Δ.Ε. γίνεται

$$\mathcal{L}\{y^{iv}\}+5\mathcal{L}\{y''\}+4\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{g(t)\}\Rightarrow$$

$$\left(s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2\cancel{y'(0)}-s\cancel{y''(0)}-\cancel{y'''(0)}\right)+5\left(s^2Y(s)-sy(0)-\cancel{y'(0)}\right)+4Y(s)=G(s)\Rightarrow$$

$$(s^4+5s^2+4)Y(s)-(s^3+5s)=G(s)\Rightarrow(s^2+1)(s^2+4)Y(s)=G(s)+s^3+5s\Rightarrow$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{G(s)}{(s^2+1)(s^2+4)}+\frac{s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}}$$

Λόγω της άσκ.3 (σελ.362), είναι

$$H(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{2}{s^2+4}\right)$$

με $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=h(t)=\frac{1}{6}(2\sin t-\sin 2t)$

Ακόμα, θέτουμε

$$\frac{s^3+5s}{(s^2+1)(s^2+4)}=\frac{A_1s+A_0}{s^2+1}+\frac{B_1s+B_0}{s^2+4}\Rightarrow$$

$$(A_1s+A_0)(s^2+4)+(B_1s+B_0)(s^2+1)=s^3+5s\Rightarrow$$

$$(A_1+B_1)s^3+(A_0+B_0)s^2+(4A_1+B_1)s+(4A_0+B_0)=s^3+5s\Rightarrow$$

$$\begin{cases}A_1+B_1=1\\4A_1+B_1=5\\A_0+B_0=0\\4A_0+B_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-A_1-B_1=-1\\4A_1+B_1=5\\B_0=-A_0\\3A_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3A_1=4\\B_1=1-A_1\\A_0=B_0=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=4/3\\B_1=-1/3\\A_0=B_0=0\end{cases}$$

Επομένως, είναι

$$Y(s)=G(s)\,H(s)+\frac{4}{3}\left(\frac{s}{s^2+1^2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{s}{s^2+2^2}\right)$$

και εφαρμόζοντας στην τελευταία, αντίστροφο μετ/σμό Laplace, λόγω των τύπων

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\}=\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\quad,\quad\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau\right\}=F(s)G(s),$$

προκύπτει ότι

$$\boxed{y(t)=\frac{4}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t+\frac{1}{6}\int_0^t\left[2\sin(t-\tau)-\sin 2(t-\tau)\right]g(\tau)\,d\tau}$$

που είναι η ζητούμενη λύση του Π.Α.Τ.

6.430/12

$$x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\equiv A} x$$

Η χαρακτ/κή εξίσωση του παραπάνω πίνακα είναι

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+ 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)[(-\lambda)(3-\lambda)-4] - 2[2(3-\lambda)-8] + 4(4+4\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) - 2(-2\lambda - 2) + 16(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 4(\lambda+1) + 16(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)[-(\lambda-3)(\lambda-4) + 20] = 0 \Rightarrow (\lambda+1)[(\lambda^2 - 7\lambda + 12) - 20] = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = 0 \Rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-8) = 0 \quad ,$$

οπότε οι ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$.

Τώρα, θα υπολογίσουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

Για $\lambda = 8$, έχουμε

$$(A - 8I_3)\xi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -5\xi_1 + 2\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ \xi_1 - 6\xi_2 + \xi_3 = 0 \\ 4\xi_1 + 2\xi_2 - 5\xi_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(1)-(3)} \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 = 0 \\ 2\xi_2 - \xi_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_3 \\ \xi_3 = 2\xi_2 \end{cases} \rightsquigarrow \xi = \begin{pmatrix} 2\xi_2 \\ \xi_2 \\ 2\xi_2 \end{pmatrix} = \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\triangle \text{ για } \xi_2 = 1)$$

Για $\lambda = -1$, υπολογίζουμε

$$(A + I_3)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$$

Θέτοντας $u_3 = 0$, παίρνουμε $2u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -2u_1$ και τότε, είναι $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ -2u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ και για $u_1 = 1$: $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Αν θέσουμε $u_1 = 0$, προκύπτει $u_2 + 2u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = -2u_3$, οπότε $u = \begin{pmatrix} 0 \\ -2u_3 \\ u_3 \end{pmatrix} = u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και για $u_3 = 1$: $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Επειδή τα $u^{(1)}, u^{(2)}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = -1$ (αφού $a_1 u^{(1)} + a_2 u^{(2)} = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = 0$), η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\boxed{x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}}$$

Παρατήρηση: Μια άλλη επιλογή για τα ιδιοδιανύσματα $u^{(1)}$ και $u^{(2)}$ θα μπορούσε να είναι η εξής

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

20. $t x' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{\equiv A} x$

Η χαρακτ/κή εξίσωση του πίνακα A είναι

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)+3=0 \Rightarrow$

$(\lambda^2 - 4) + 3 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1$ (οι ιδιοτιμές του A)

Για $\lambda = 1$, έχουμε

$(A - I_2)\xi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_2 = 0 \\ 3\xi_1 - 3\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \xi_1 = \xi_2,$

οπότε $\xi = \xi_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και για $\xi_1 = 1$, προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα

$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$)

Για $\lambda = -1$, είναι

$(A + I_2) u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 3u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = 3u_1.$

Επομένως

$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ 3u_1 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ και για $u_1 = 1$, λαμβάνουμε το ιδιοδιάνυσμα

$u = [1 \quad 3]^T$ (που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$).

Θέτοντας, τώρα, $x_1 = \xi t^{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$ και $x_2 = u t^{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} t^{-1}$,

έπεται ότι η (γενική) λύση του συστήματος είναι

$$\boxed{x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}}$$

σ.439/7.

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x$$

Η χαρακτ/κή εξίσωση είναι

$\det(\lambda I_3 - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ -3 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 \\ -2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(\lambda-1)\left[(\lambda-1)^2 + 4\right] = 0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$
($\hookrightarrow \Delta = 4 - 20 = -16$)

με αντίστοιχες ιδιοτιμές τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{2 \pm i\sqrt{16}}{2} = 1 \pm 2i$.

Για $\lambda = 1$, είναι

$(A - I_3)\xi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_1 = \xi_3 \\ \xi_2 = -\frac{3}{2}\xi_1 \end{cases}$

και για $\xi_1 = \xi_3 = 2$, προκύπτει $\xi_2 = -3$, οπότε $\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Για $\lambda = 1+2i$, υπολογίζουμε

$$[A-(1+2i)I_3]u=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}-2i & 0 & 0\\ 2 & -2i & -2\\ 3 & 2 & -2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{cases}(-2i)u_1=0\\ u_1+(-i)u_2-u_3=0\\ 3u_1+2u_2+(-2i)u_3=0\end{cases}$$

Θέτοντας $u_1=0$ στην εξίσωση $u_1-iu_2-u_3=0$, παίρνουμε $iu_2+u_3=0$ και για $u_2=1 \rightsquigarrow u_3=-i$, οπότε $u=\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$.

(Εναλλακτικά, θέτοντας στην ίδια εξίσωση $u_2=1$, $u_3=0 \rightsquigarrow u_1=i$ και τότε $u=\begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$).

Για $\lambda=1-2i$, έχουμε

$$[A-(1-2i)I_3]v=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}2i & 0 & 0\\ 2 & 2i & -2\\ 3 & 2 & 2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0 \Rightarrow v_1+iv_2-v_3=0$$

και για $v_1=0$, $v_2=1 \rightsquigarrow v_3=i$, οπότε λαμβάνουμε το ιδιοδιάνυσμα $v=\begin{pmatrix}0\\1\\i\end{pmatrix}$.

(Εναλλακτικά και πάλι, για $v_2=1$, $v_3=0 \rightsquigarrow v_1=-i \rightsquigarrow v=\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$).

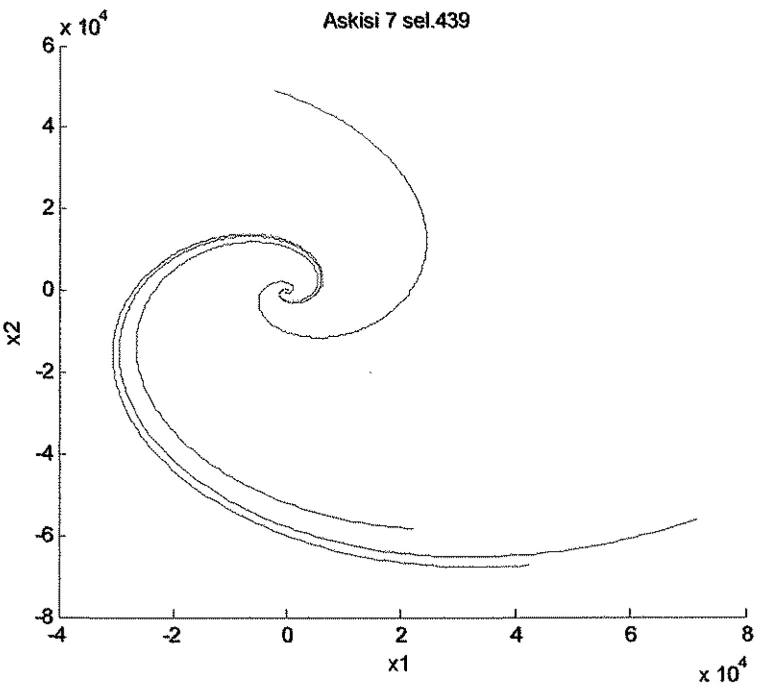
Τώρα, υπολογίζουμε

$$u e^{(1+2i)t} = u e^{t}\cdot e^{i(2t)} = u e^{t}(\cos 2t + i\sin 2t) = e^{t}(\cos 2t+i\sin 2t)\begin{pmatrix}0\\1\\-i\end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t + i\sin 2t\\ \sin 2t - i\cos 2t\end{pmatrix} = \underbrace{\boxed{e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}} + i\,\boxed{e^{t}\begin{pmatrix}0\\ \sin 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}}}_{2\ \text{γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.}}$$

Έτσι, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\boxed{x(t) = c_1\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}e^{t} + c_2\begin{pmatrix}0\\ \cos 2t\\ \sin 2t\end{pmatrix}e^{t} + c_3\begin{pmatrix}0\\ \sin 2t\\ -\cos 2t\end{pmatrix}e^{t}}\,.$$



6.450/12.

$$x' = \begin{pmatrix} -5/2 & 1 & 1 \\ 1 & -5/2 & 1 \\ 1 & 1 & -5/2 \end{pmatrix}x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda-\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda-\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda-\frac{5}{2} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda+\tfrac{5}{2}) \begin{vmatrix} -\lambda-\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & -\lambda-\frac{5}{2} \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda-\frac{5}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda-\frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(\lambda+\tfrac{5}{2})\left[(\lambda+\tfrac{5}{2})^2 - 1\right] - \left(-\lambda-\tfrac{5}{2}-1\right)$$

$$+\left(1+\lambda+\tfrac{5}{2}\right) = 0 \Rightarrow -(\lambda+\tfrac{5}{2})(\lambda+\tfrac{3}{2})(\lambda+\tfrac{7}{2}) + 2(\lambda+\tfrac{7}{2}) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda+\tfrac{7}{2})\left[2-(\lambda+\tfrac{5}{2})(\lambda+\tfrac{3}{2})\right] = 0 \Rightarrow (\lambda+\tfrac{7}{2})(\lambda^2+4\lambda+\tfrac{7}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = -\frac{7}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$ $\rightsquigarrow$ οι ιδιοτιμές του A

Για $\lambda = -1/2$:

$$(A + \tfrac{1}{2}I_3)\xi = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3 = 0$$

και για $\xi_1 = \xi_2 = 1 \rightsquigarrow \xi_3 = 1$, οπότε $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Για $\lambda = -7/2$:

$$(A + \tfrac{7}{2}I_3)u = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

με δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα τα

$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\left(\text{ή } u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ και } u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Έτσι, η γενική λύση του συστήματος είναι

$$x(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t/2} + c_3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t/2}$$

και τότε, η αρχική συνθήκη δίνει

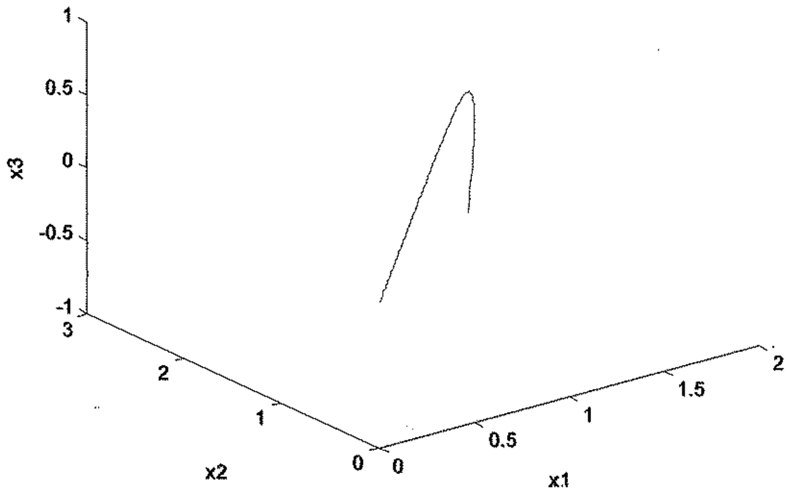
$$x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 2 \\ c_1 + c_3 = 3 \\ c_1 - c_2 - c_3 = 1 \end{cases} \xrightarrow{(+)} \begin{cases} c_2 = 2 - c_1 \\ c_3 = 3 - c_1 \\ 3c_1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 4/3 \\ c_2 = 2/3 \\ c_3 = 5/3 \end{cases}.$$

Συνεπώς, η λύση του Π.Α.Τ. είναι

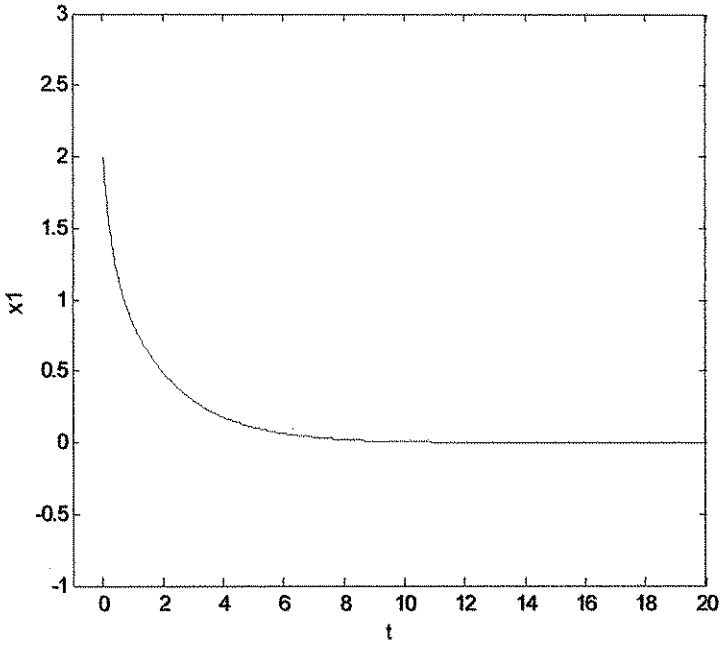
$$\boxed{x(t) = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t/2} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t/2} + \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-7t/2}}$$

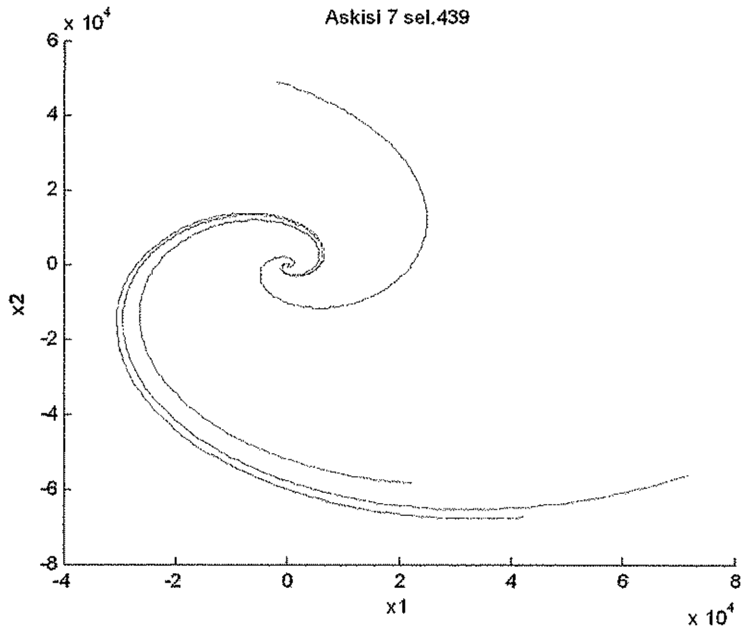
ypolp450ex12

Askisi 12 sel.450



Askisi 12 sel.450





Askisi 7 sel.439
x 10^4
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
x2
-4
-2
0
2
4
6
8
x1
x 10^4

6.465/6. $x' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1}+4 \end{pmatrix}, \quad t>0 \qquad (E)$

$$\det(A-\lambda I_2)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+4)(\lambda+1)-4=0 \Rightarrow$$
$$\lambda^2+5\lambda+\cancel{4}-\cancel{4}=0 \Rightarrow \lambda(\lambda+5)=0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1=0,\ \lambda_2=-5}$$

Για $\lambda=0$:

$$(A-0\cdot I_2)\xi=0 \Rightarrow A\xi=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow 2\xi_1-\xi_2=0$$

και για $\xi_1=1$, προκύπτει $\xi_2=2 \rightsquigarrow \xi=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ με $\|\xi\|_2=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$

Για $\lambda=-5$:

$$(A+5I_2)u=0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow u_1+2u_2=0$$ και για $u_2=1 \rightsquigarrow$
$u_1=-2 \rightsquigarrow u=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ με $\|u\|_2=\sqrt{5}$

Από τα παραπάνω, έπεται ότι η γενική λύση του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος είναι

$$x_c(t)=c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-5t}.$$

Ο πίνακας με στήλες τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα είναι

$$T=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\qquad\quad \underset{u}{\downarrow} \quad \underset{\xi}{\downarrow}$$

Επειδή, τώρα, ο πίνακας των συντελεστών A είναι πραγματικός και συμμετρικός, ισχύει ότι (σελ.459)

$$T^{-1}=T^{*}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $\boxed{x=Ty}$ και αντικαθιστώντας στην (E), παίρνουμε

$$Ty'=ATy+g(t) \Rightarrow y'=T^{-1}ATy+T^{-1}g(t) \Rightarrow$$
$$y'=Dy+T^{-1}g(t)=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}y+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1}+4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$
$$y'=\begin{pmatrix} -5y_1 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ 5t^{-1}+8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} -5y_1+4/\sqrt{5} \\ \frac{5}{\sqrt{5}}y_1+8/\sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1'+5y_1=\frac{4}{\sqrt{5}} \\ y_2'=\frac{1}{\sqrt{5}}(5t^{-1}+8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y_1e^{5t})'=\frac{4}{\sqrt{5}}e^{5t} \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\int(5t^{-1}+8)\,dt+c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1e^{5t}=\frac{4}{\sqrt{5}}\int e^{5t}\,dt+c_1 \\ y_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(5\ln t+8t)+c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1(t)=e^{-5t}\left(\frac{4}{5\sqrt{5}}e^{5t}+c_1\right) \\ y_2(t)=\frac{5}{\sqrt{5}}\ln t+\frac{8}{\sqrt{5}}t+c_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_1(t)=\frac{4}{5\sqrt{5}}+c_1e^{-5t} \\ y_2(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}(5\ln t+8t)+c_2 \end{cases}$$

Έτσι, από τη σχέση $x=Ty$, προκύπτει

$$x=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{-5t}+\frac{4}{5\sqrt{5}} \\ c_2+\frac{1}{\sqrt{5}}(5\ln t+8t) \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -2c_1e^{-5t}-\frac{8}{5\sqrt{5}}+c_2+\frac{1}{\sqrt{5}}(5\ln t+8t) \\ c_1e^{-5t}+\frac{4}{5\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}(5\ln t+8t)+2c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{\sqrt5}\, c_1 \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} e^{-5t} + \frac{1}{\sqrt5}\, c_2 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\ln t + \frac{8}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t + \frac{4}{25}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}$$

που είναι η γενική λύση του συστήματος.

---

15. $t x' = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}-2t\\ t^4-1\end{pmatrix}$, $\quad x^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t^{-1} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^2$, $t>0$

Αντικαθιστώντας την $x^{(c)}$ στην αντίστ. ομογενή Δ.Ε., παίρνουμε

$$t\left[-c_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} t^{-2} + 2c_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} t\right] = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\left[c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} t^2\right] \Longrightarrow$$

$$-c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + 2c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^2 = c_1 \begin{pmatrix}3-4\\ 2-4\end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix}6-2\\ 4-2\end{pmatrix} t^2$$

$$= c_1\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}t^2 = -c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + 2c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^2$$

που ισχύει. Άρα, πράγματι, η $x^{(c)}$ είναι λύση της ομογενούς.

Αφού $x^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix}t^{-1}\\ 2t^{-1}\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2t^2\\ t^2\end{pmatrix}$, τα δύο διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε, ένας θεμελιώδης πίνακας είναι ο $\Psi(t) = \begin{pmatrix}t^{-1} & 2t^2\\ 2t^{-1} & t^2\end{pmatrix}$ με

$$\det(\Psi(t)) = \begin{vmatrix}t^{-1} & 2t^2\\ 2t^{-1} & t^2\end{vmatrix} = t^{-1}t^2 - 4t^{-1}t^2 = t - 4t = -3t.$$

Οπότε, ο αντίστροφος είναι

$$\Psi^{-1}(t) = \frac{1}{(-3t)}\begin{pmatrix}t^2 & -2t^2\\ -2t^{-1} & t^{-1}\end{pmatrix} \Longrightarrow \Psi^{-1}(t) = \frac13\begin{pmatrix}-t & 2t\\ 2t^{-2} & -t^{-2}\end{pmatrix}.$$

Διαιρώντας και τα 2 μέλη της Δ.Ε. με t, προκύπτει ο μη ομογενής όρος $g(t) = \begin{pmatrix}-2\\ t^3 - t^{-1}\end{pmatrix}$

Χρησιμοποιώντας, τώρα, τη μέθοδο μεταβολής παραμέτρων, η λύση x της Δ.Ε. δίνεται από την $\boxed{x = \Psi(t)\,u(t)}$, όπου το $u(t)$ ικανοποιεί την

$$\Psi(t)\,u'(t) = g(t) \Longrightarrow u'(t) = \Psi^{-1}(t)\,g(t) \Longrightarrow u'(t) = \frac13\begin{pmatrix}-t & 2t\\ 2t^{-2} & -t^{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ t^3 - t^{-1}\end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$u'(t) = \frac13\begin{pmatrix}2t^4 + 2t - 2\\ -t - 4t^{-2} + t^{-3}\end{pmatrix} \Longrightarrow u(t) = \frac13\begin{pmatrix}\int(2t^4+2t-2)\,dt + c_1'\\ \int(-t-4t^{-2}+t^{-3})\,dt + c_2'\end{pmatrix}$$

$$u(t) = \frac13\begin{pmatrix}\frac25 t^5 + t^2 - 2t + c_1'\\ -\frac{t^2}{2} + 4t^{-1} - \frac{t^{-2}}{2} + c_2'\end{pmatrix} \Longrightarrow u(t) = \begin{pmatrix}\frac{2}{15}t^5 + \frac13 t^2 - \frac23 t + c_1\\ -\frac16 t^2 + \frac43 t^{-1} - \frac16 t^{-2} + c_2\end{pmatrix}$$

Έτσι, η λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι

$$x = \Psi(t)\cdot u(t) = \begin{pmatrix}t^{-1} & 2t^2\\ 2t^{-1} & t^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{15}t^5 + \frac13 t^2 - \frac23 t + c_1\\ -\frac16 t^2 + \frac43 t^{-1} - \frac16 t^{-2} + c_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{2}{15}t^4 + \frac13 t - \frac23 - \frac13 t^4 + \frac83 t - \frac13 + c_1 t^{-1} + 2c_2 t^2\\ \frac{4}{15}t^4 + \frac23 t - \frac43 - \frac16 t^4 + \frac43 t - \frac16 + 2c_1 t^{-1} + c_2 t^2\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x(t) = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}t^{-1} + c_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix}-1/5\\ 1/10\end{pmatrix}t^4 + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}t - \begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix}}$$