ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΔΡΑ ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑΣ ΙΙ.

ΚΑΘ. Ι. ΔΙΑΜΕΣΗΣ

Ὑπαρμονικὲς σὲ συστήματα

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}, t) = 0$$

Γ. ΜΟΥΣΤΑΚΙΔΗΣ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΕΜΠ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ

ΕΤΟΣ 1979

Εὐχαριστῶ ὅλους ὅσους μέ βοήθησαν στήν ἐκπόνηση τῆς ἐργασίας αὐτῆς.Εὐχαριστῶ ἰδιαί-τερα τόν καθηγητή τῆς ἕδρας κ. Διάμεση,γιά τό πλῆθος τῶν βιβλίων καί ἐργασιῶν πού μοῦ διέθεσε.

ΣΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μή γραμμικά φαινόμενα 5
Φαινόμενο ταλαντώσεων σέ αὐτόνομα 6
Φαινόμενο πηδήματος 8
Ἐξαναγκασμένες ταλαντώσεις 9
Ἀλλόκοτες ταλαντώσεις 10
Ἡμιπεριοδικές ταλαντώσεις 10

II. ΥΠΑΡΜΟΝΙΚΕΣ 12

IIα Κύρια ἀποτελέσματα 15
Ὁρισμός ὑπαρμονικῶν 15
Βασικό θεώρημα ὑπάρξεως 15
Θεώρημα ἄρτιας συμμετρίας 16
Θεώρημα περριτής συμμετρίας 17
Θεώρημα συνεχείας ὡς πρός παραμέτρους 17
Ἀπαγορευμένο διάστημα 18
Σχετική θέση τροχιών 18
Χρόνος τομής 20
Συναρτήσεις καί τροχιές φραγής 22
Φράγματα χρόνου τομής 23
Πλάτος ταλαντώσεως 26
Ἀναλυτικός καί ἀριθμητικός ὑπολογισμός φραγμάτων 27

IIβ Παραδείγματα 29
Μή γραμμικό ἐλατήριο 29
Ἐξαναγκασμένες ταλαντώσεις ἐκκρεμούς 33

III. ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

Συστήματα β΄τάξεως δίχως συμμετρίες 37
Συμμετρίὲς 40
Συστήματα μέ μικρές διαταραχές 42
Διατάραξη συστημάτων μέ περιοδική λύση 42
Ὑπαρμονικές μεγάλης τάξεως 44

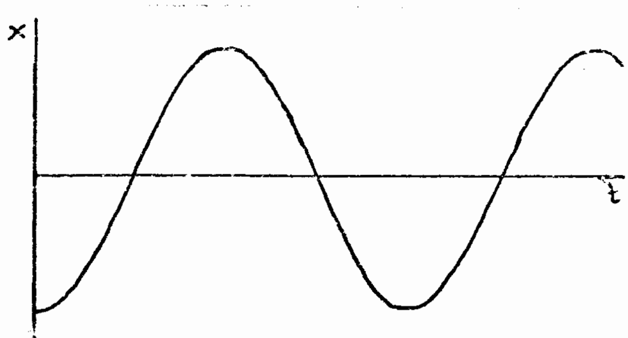
IV.	ΑΛΛΟΚΟΤΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ	46
V.	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ	50
	ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	53
	Σχετική θέση τροχιών	53
	Συμμετρίες	56
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	58
	Έργασίες	58
	Βιβλία	59

I. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

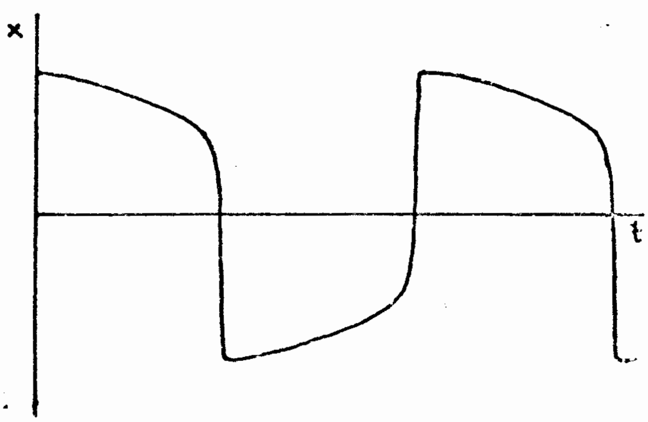
Μὴ γραμμικὰ φαινόμενα

Στή φύση, τά συστήματα πού συναντάμε είναι μή γραμμικά. Καί αύτά άκόμη πού θεωροῦμε σάν γραμμικά,είναι γραμμικά μόνο σέ μιά περιοχή λειτουργίας τους.

Τί είναι όμως ή γραμμικότητα καί γιατί τήν έπιδιώκουμε τόσο πολύ;Ό λόγος είναι,ότι ύπάρχει μιά ολόκληρη μεθοδολογία πού έχει άναπτυχθή καί πού βασίζεται στήν γραμμική άλγεβρα γιά νά βγάλει τά διάφορα συμπεράσματά της.



α. Van der Pol ε=0.1



β. Van der Pol ε=10

ΣΧΗΜΑ Ι.1

Τό βασικώτερο χαρακτηριστικό τής γραμμικότητος,είναι ή δυνατότητα ύπερθέσεως τών λύσεων.Όποιοσδήποτε δηλαδή γραμμικός συνδιασμός λύσεων είναι έπίσης λύση.

Ή ίδιότητα αύτή διευκολύνει πολύ τά πράγματα,γιά τόν λόγο αύτό οί μελετητές,όπου μπορούν,γραμμικοποιούν.

Ή διαγραφή τής μή γραμμικότητος δέν είναι πάντοτε δυνατή.Άν μέν ή συμβολή τών όρων αύτών είναι μικρή,τότε ή γραμμικοποίηση δίνει σωστά άποτελέσματα.Άν όμως είναι ούσιαστική,τότε ή γραμμικοποίηση δίνει λάθος άποτελέσματα,άφού δέν συμφωνεί μέ τά φυσικά πρότυπα.

Σάν χαρακτηριστικό παράδειγμα θά άναφέρουμε τόν ταλαντωτή Van der Pol $\ddot{x}+\epsilon\dot{x}(x^2-1)+x=0$

Όταν τό ϵ είναι τής τάξεως τού 0.1 τότε ή ταλάντωση πού έμφανίζεται είναι μέ καλή προσέγγιση ήμίτονο,γραμμικοποίηση έπομένως τού όρου $\epsilon\cdot\dot{x}(x^2-1)$ δίνει ίκανοποιητικά άποτελέσματα.Όταν όμως τό ϵ πάρει τήν τιμή 10 , έμφανίζονται ταλαντώσεις έξαιρετικά μή γραμμικές,οί λεγόμενες relaxation,πού είναι άδύνατον νά περιγραφούν άπό όποιοδήποτε γραμμικό μοντέλο.Στό σχήμαI.1(α)καί(β) βλέπουμε τίς δύο ταλαντώσεις γιά $\epsilon = 0.1$ καί $\epsilon = 10$.

Ἡ ἀνάγκη μιάς μή γραμμικής μεθόδου είναι ούσιαστική,όπως καταλαβαίνουμε άπό τό παραπάνω άπλό παράδειγμα.

Ἕνα φυσικό σύστημα,τό περιγράφουμε έν γένει μέ ένα σύστημα διαφορικών έξισώσεων.Τό πώς συμπεριφέρεται τό σύστημα στίς εκάστοτε διεγέρσεις,μπορούμε νά τό βρούμε άν λύσουμε τό σύστημα αύτό. Δυστυχώς αύτό είναι σπάνια δυνατόν νά γίνει άναλυτικά,άκόμα καί στήν γραμμική περίπτωση.Ἔχουν άναπτυχθεί προσεγγιστικοί τρόποι άντιμετωπίσεως τού προβλήματος.Σειρές μέ παραμέτρους,όπου γίνεται ύπολογισμός τών παραμέτρων τών πρώτων όρων τής σειράς.Ἡ μέθοδος είναι άρκετά κοπιαστική καί όσο άνεβαίνουμε στήν τάξη τών όρων τής σειράς,ό ύπολογισμός γίνεται έξαιρετικά δύσκολος.

Ἔχουν άναπτυχθή καί οί ποιοτικοί τρόποι άντιμετωπίσεως τού προβλήματος.Ἡ μέθοδος αύτή μάς δίνει ποιοτικά χαρακτηριστικά τού συστήματος,π.χ. άν έμφανίζει ταλαντώσεις,εύστάθεια κ.λ.π.δίχως νά λύνει τήν διαφ. έξίσ.

Ἡ τελευταία μέθοδος είναι μεγάλης σημασίας γιατί συχνά δέν μάς ένδιαφέρουν άκριβείς περιγραφές τούσυστήματος άλλά "χοντρές" ποσοτικές περιγραφές καί έν γένει ή παραπάνω μέθοδός,μάς δίνει τήν ίκανότητα νά κάνουμε καί τέτοιες περιγραφές.

Στά μή γραμμικά συστήματα έμφανίζονται μερικά χαρακτηριστικά φαινόμενα τά όποία θεωρήθηκε σκόπιμο νά άναφερθούν γιά νά έχουμε μιά κάπως πλήρη είκόνα τών μή γραμμικών συστημάτων.

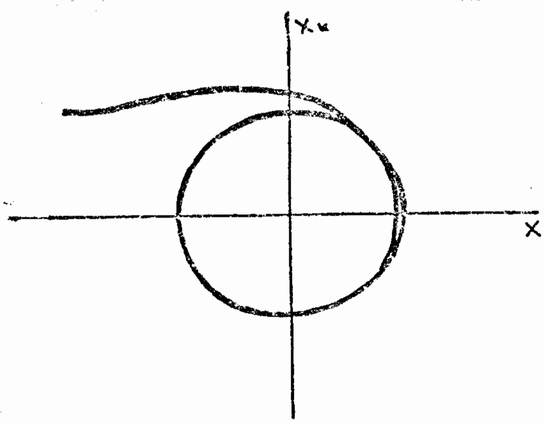
ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΣΕ ΑΥΤΟΝΟΜΑ

Αύτόνομα είναι τά συστήματα στά όποία δέν ύπάρχει είσοδος, άλλά μόνον άρχικές συνθήκες.Ὅπου δηλαδή ή έννοια χρόνος ύπάρχει μόνο σάν παράγωγος(.). Περιγράφονται άπό διαφ. έξισ. τής μορφής $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$.

Τά συστήματα αύτά έμφανίζουν ταλαντώσεις.Παράδειγμα ό ταλαντωτής Van der Pol .Τό φαινόμενο αύτό δέν είναι ξένο στά γραμμικά συστήματα.Ἐμφανίζεται όταν τό σύστημα έχει άπλές ρίζες στόν φανταστικό άξονα. Στά μή γραμμικά είναι άπλώς κάτι ποιό συνηθισμένο καί οί ταλαντώσεις είναι περισσότερο πολύπλοκες.

Ὑπάρχουν βέβαια καί μή γραμμικά τά όποία δέν ταλαντώνονται.

Στά μή γραμμικά έχει άναπτυχθή μιά μέθοδος παρακολουθήσεως τού συστήματος στό λεγόμενο έπίπεδο τών φάσεων.Διαλέγουμε δύο συνιστώσες τού συστήματος έστω τίς x_1, x_2 καί παρακολουθούμε τήν λύση στό ἐπίπεδο x_i, x_κ .Τό ἐπίπεδο αὐτό εἶναι ἰδανικό γιά τήν περίπτωση ταλαντώσεων,διότι τότε τά σημεία $(x_i(t), x_\kappa(t))$καταλήγουν σέ μιά κλειστή καμπύλη τόν <u>ὁριακό κύκλο</u>. Ὁ ὁριάκός κύκλος φαίνεται στό σχῆμα I.2

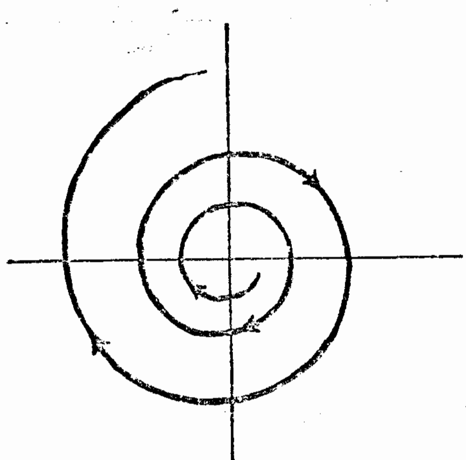


ΣΧΗΜΑ I.2

Ἡ ὕπαρξη ὁριακῶν κύκλων,σημαίνει δυνατότητα ταλαντώσεως τοῦ συστήματος. Τό σύνολο τῶν σημείων$(x_i(t), x_\kappa(t))$ καλεῖται <u>τροχιά</u>.

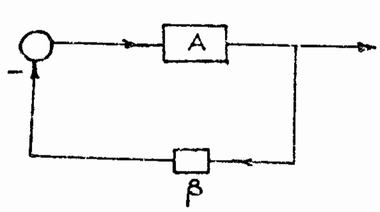
Ἡ μελέτη τόῦ συστήματος στό ἐπίεδο τῶν φάσεων εἶναι πάρα πολύ συνηθισμένη καί ἀπό μαθηματικής καθαρά ἀπόψεως.Ὑπάρχουν θεωρήματα ὑπάρξεως,μοναδικότητος,φραγμένου,τῶν τροχιῶν.

Ὑπάρχουν συστήματα πού ἐμφανίζουν τροχιά ὅπως αὐτή τοῦ σχήματος I.3,μιά ταλάντωση μέ πλάτος πού τείνει στό ἄπειρο.Ἀπό μαθηματικής ἀπόψεως ἡ ἔννοια ἄπειρο εἶναι δεκτή.Ἐξετάζεται μάλιστα καί τό φαινόμενο"ταλάντωση στό ἄπειρο". Στή φύση ὅμως δέν ὑπάρχει τέτοια ποσότητα,ὑπάρχει τό "πολύ μεγάλο" πού δέν παύει νά εἶναι πεπερασμένο,πράγμα πού σημαίνει ὁριακός κύκλος στό ἐπίπεδο τῶν φάσεων.



ΣΧΗΜΑ I.3

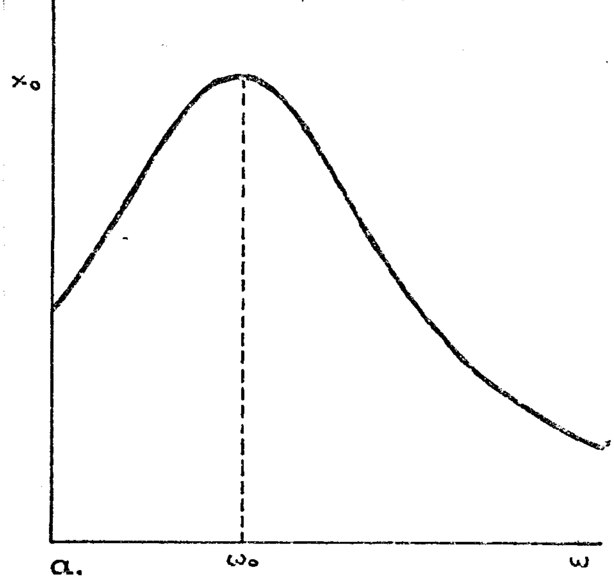
Τήν ἰδιότητα αὐτή τῆς φύσεως τήν ἐκμεταλεύνται καί στήντεχνολογία γιά τήν παραγωγή ταλαντώσεων.Σέ κατασκευή τοῦ σχήματος I.4 ,δέν ἀπαιτοῦν $A \cdot \beta = -1$ πού εἶναι ἡ συνθήκη ταλαντώσεως,κάτι πού εἶναι δύσκολο νά πραγματοποιηθῆ,ἀλλά $|A \cdot \beta| > 1$ λέγοντας:"ἡ μή γραμμικότητα θά σταματήση τήν αὔξηση τοῦ πλάτους".

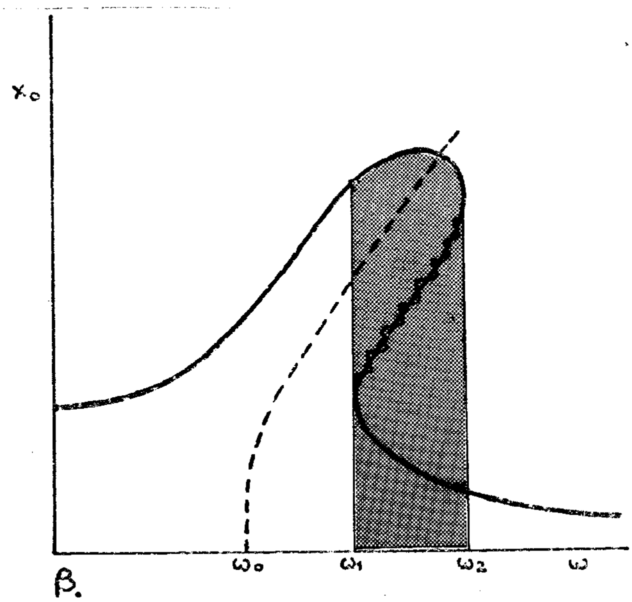


ΣΧΗΜΑ I.4

ΦΑΙΝΟΜΕΝΟ ΠΗΔΗΜΑΤΟΣ

Έστω ότι στό σύστημά μας έπιβάλουμε σάν είσοδο ένα ήμίτονο πλάτους 1 .Τό σύστημά μας,έν γένει θά ταλαντωθή,μέ κάποιο πλάτος x_o .Τό πλάτος αύτό έχει κάποια σχέση μέ τήν συχνότητα ω τής είσόδου.





ΣΧΗΜΑ Ι.5

Μιά τυπική μορφή τής συναρτήσεως $x_o(\omega)$γιά γραμμικά συστήματα φαί- στό σχήμα Ι.5(α).Ή άντίστοιχη γιά μιά τυπική μή γραμμική περίπτωση φαίνεται στό Ι.5(β).Συγκρίνοντας τίς δύο καμπύλες,μπορούμε νά πούμε τά έξεις:

Ή γραμμική περίπτωση,είναι συμμετρική ώς πρός τήν ίδιοσυχνότητα ω_o τούσυστήματος,κάτι πού δέν συμβαίνει στήν μή γραμμική.

Ή γραμμική είναι μονότιμος,δηλαδή σέ κάθε ω άντιστοιχεί ένα x_o. Στήν μή γραμμική περίπτωση έμφανίζεται μιά πολύ ένδιαφέρουσα περιοχή μεταξύ τών συχνοτήτων ω_1 καί ω_2 . Στήν περιοχή αύτή,σέ κάθε ω άντιστοιχούν τρία πλάτη,δηλαδή τρείς ταλαντώσεις.

Στά φυσικά συστήματα έχουν παρατηρηθή ή πάνω καί ή κάτω ταλάντωση, ήμεσαία φαίνεται ότι είναι άσταθής. Τό ποιά ταλάντωση θά προτιμήση τό σύστημα,έξαρτάται άπό τίς άρχικές συνθήκες.

Άς ύποθέσουμε ότιμεταβάλουμε τήν συχνότητα ω πολύ σιγά ώστε τό σύστημά μας νά προλαβαίνει νά άνταποκρίνεται σύμφωνα μέ τήν καμπύλη τού σχήματος (β) καί ξεκινάμε μέ $\omega > \omega_2$.Όσο μικραίνει ή συχνότητα,άλλά είναι μεγαλύτερη τής ω_1,τό σύστημα ταλαντώνεται μέ τό μικρότερο πλάτος.Μόλις ή ω φθάση τήν τιμή ω_1 καί μεγαλώσει κατά λίγο,τότε τό πλάτος κάνει ένα πήδημα πρός τά μεγαλύτερα πλάτη καί άκολουθεί πάλι τήν πάνω ταλάντωση.

Άν τώρα ξεκινήσουμε μέ $\omega < \omega_1$,τότε τό σύστημά μας θά ταλαντώνεται μέ τό μεγαλύτερο πλάτος μέχρι τό ω νά γίνει ω_2 .Άν μεγαλώσει κατά λίγο άκόμη τό ω,θά έχουμε πήδημα πρός τά μικρότερα πλάτη.

Τό φαινόμενο αύτό είναι καθαρά μή γραμμικό καί είναι άδύνατον νά παρατηρηθή στά γραμμικά. Όταν έμφανιστεί τό φαινόμενο αύτό, σημαίνει ότι ή μή γραμμικότητα είναι ούσιαστικός παράγων καί δέν μπορεί νά γίνει γραμμικοποίηση.

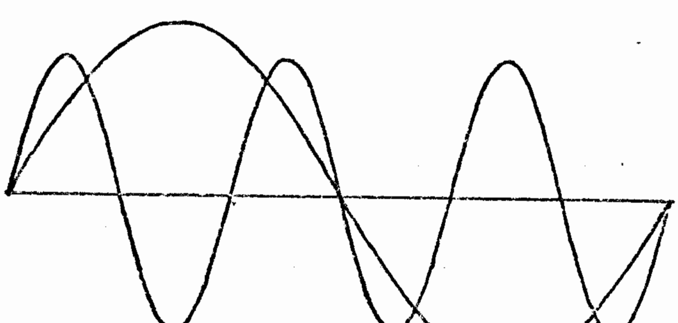
ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ανσέ ένα σύστημα έπιβάλλουμε μιά περιοδική είσοδο, τότε ή έξοδός μας είναι ένγένει περιοδική. Στό προηγούμενο φαινόμενο ή προσοχή μας ήταν στραμένη στό πλάτος τών ταλαντώσεων, τώρα θά μάς άπασχολήσει ή συχνότητα.

Στά γραμμικά συστήματα ή έξοδος περιέχει τίς συχνότητες τής εισόδου καί τήν ίδιοσυχνότητα τού συστήματος, άν τό σύστημα είναι ταλαντωτής.

Στά μή γραμμικά όμως είναι δυνατόν νά έμφανισθούν καί άλλες συχνότητες, συχνότητες τής μορφής $\frac{\kappa}{m}\omega$, όπου ω ή θεμελιώδης συχνότητα εισόδου, καί κ, m άκέραιοι. Διακρίνουμε τίς έξεῖς περιπτώσεις:
$m=1$, πολλαπλάσια δηλαδή τής θεμελιώδους. Τίς συχνότητες αύτές τίς όνομάζουμε ύπεραρμονικές.
$\kappa=1, m\neq 1$, ύποπολλαπλάσια δηλαδή τής θεμελιώδους συχνότητος τής εισόδου. Αύτές τίς όνομάζουμε ύπαρμονικές. (Τό θέμα πού θά μάς άπασχολήση).
$\kappa\neq 1, m\neq 1$, ρητά κλάσματα τής ω, τίς όποίες συχνότητες, τίς καλούμε ύπέρ-υπαρμονικές.

Τό χαρακτηριστικό όμως τών παραπάνω ταλαντώσεων είναι ότι ή περίοδός τους είναι καί περίοδος τής εισόδου, όχι κατ' άνάγκη βέβαια ή έλάχιστη.



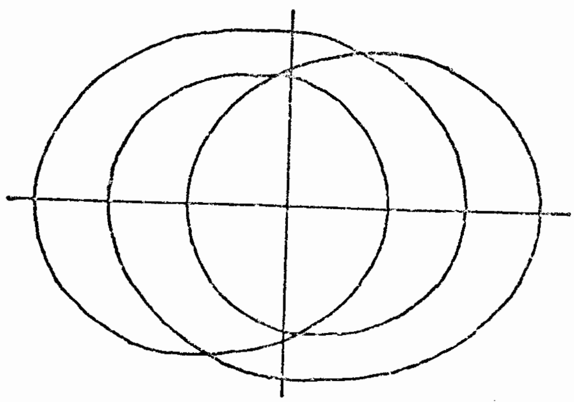
ΣΧΗΜΑ Ι.6

Ένα παράδειγμα ύπαρμονικών είναι ή έξίσωση τού Duffing, πού είναι τής μορφής $\ddot{x}+ax+\beta x^3=f(t)$
Άν $a=1$, $\beta=2$ καί $f(t)=\sin\omega_\kappa t$ όπου $\omega_\kappa=4.44$ τότε ή έξίσωση δέχεται σάν λύση τήν $x=\sqrt[3]{2}\cdot\sin\frac{\omega_\kappa}{3}t$ δηλαδή τρίτη ύπαρμονική. Βλέπουμε στό σχήμα Ι.6 τήν είσοδο καί τήν έξοδο.

Τό φαινόμενο τών ύπαρμονικών δέν είναι ξένο στά γραμμικά συστήματα Άν τό σύστημα είναι ταλαντωτής καί βάλλουμε σάν είσοδο, σήμα μέ συχνότητα πολλαπλάσια τής συχνότητος ταλαντώσεως τού συστήματος, τότε έπειδή ή έξοδος περιέχει καί τήν ίδιοσυχνότητα τού συστήματος, θά έμφανιστεί ύπαρμονική. Σάν παράδειγμα άναφέρουμε τήν έξίσωση:
$\ddot{x}+\left(\frac{a}{\kappa}\right)^2 x = A\cos at$ πού έχει σάν γενική λύση τήν $x=C_1\cos\left(\frac{a}{\kappa}t+\varphi_1\right)+B\cos(at+\varphi_2)$
δηλαδή κ-ύπαρμονική.

Πρέπει όμως νά παρατηρήσουμε,ότι στά γραμμικά έχουμε ύπαρμονικές μόνον σέ συχνότητες πολλαπλάσιες τής ίδιοσυχνότητος τού συστήματος,κάτι πού δέν είναι άπαραίτητο στά μή γραμμικά,πού είναι δυνατόν νά έμφανίσουνύπαρμονικές γιά όποιαδήποτε συχνότητα.

Στό έπίπεδο τών φάσεων οί ταλαντώσεις αύτές καταλήγουν στόν οριακό κύκλο.Λέγοντας όριακό κύκλο τό μυαλό μας συνήθως πηγαίνει σέ μιά κλειστή καμπύλη τής μορφής ένός κύκλου ίσως καί κάπως συμπιεσμένου.΄Οριακός κύκλος όμως, μπορεί κάλιστα νά είναι καί ένα σχήμα σάν τό σχήμα I.7.Στήν περίπτωση αύτή ό όρος πού έχει τήν μικρή συχνότητα,έχει μικρό πλάτος καί μεταθέτει τόν όρο μεγάλης συχνότητος.



ΣΧΗΜΑ I.7

ΑΛΛΟΚΟΤΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Στό προηγούμενο φαινόμενο ή έξοδος είχε περίοδο,περίοδο πού ύπήρχε καί στήν είσοδο.Οί άλλόκοτες ταλαντώσεις έχουν περίοδο πού δέν ύπάρχει στήν είσοδο.Τό φαινόμενο αύτό είναι καθαρά μή γραμμικό.

Σάν παράδειγμα άναφέρουμε τήν έξίσωση $\ddot{x}+x+(x^2+\dot{x}^2-1)\cdot h(t)=0$ ή όποία δέχεται σύ λύση τήν συνάρτηση $x=\cos(t+\phi)$, πού είναι περιόδου 2η ένώ ή $h(t)$ μπορεί νά έχει όποιαδήποτε περίοδο.

Στίς ταλαντώσεις αύτές μπορούν νά συμπεριληφθούν καί ταλαντώσεις μέ περίοδο ρητό κλάσμα τής περιόδου τής εισόδου.Οί ταλαντώσεις αύτές δέν έχουν νά κάνουν τίποτα μέ τίς ύπαρμονικές,στίς όποίες ή περίοδος είναιπολλαπλάσιο τής περιόδου τής εισόδου.

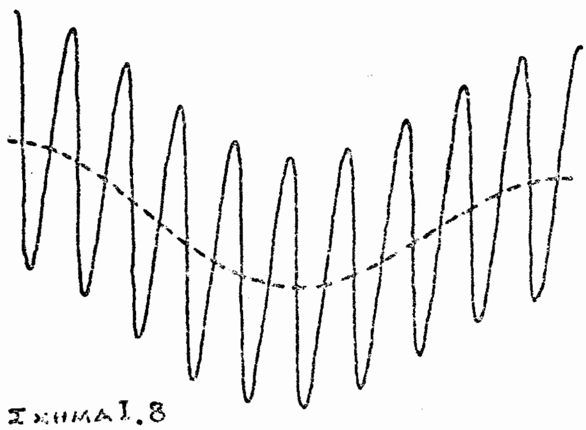
Παράδειγμα στίς ταλαντώσεις αύτές ήδιαφορική
$\ddot{x}+4x+p(t)\cdot\sqrt{\frac{1+x}{2}}=\cos t$ πού δέχεται σάν λύση τήν $x=\cos 2t$ περιόδου η .($p(t)$ ή παλμική συνάρτηση,περιόδου 2η)

Γιά τίς ταλαντώσεις αύτές ύπάρχει ένα κεφάλαιο στήν έργασία αύτή ,όπου καί άντιμετωπίζεται τό πρόβλημα εύρέσεως.

ΗΜΙΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Είναι ταλαντώσεις όχι περιοδικές,έν γένει άποτελούνται άπό όρους μέ διαφορετική περίοδο καί μάλιστα δέν μπορεί νά βρεθεί μέγιστος κοινός διαιρέτης τών περιόδων αύτών,γιά νά ύπάρξει κοινή περίοδος.

΄Εμφανίζονται πολύ συχνά στά μή γραμμικά συστήματα καί ίδιαίτερα όταν τό σύστημα είναι ταλαντωτής.'Εμφανίζονται συνήθως ύπό μορφήν άθροίσματος δύο όρων.'Ενός γρήγορα μεταβαλομένου καί ένός άργά.


Σχημα Ι.8

Μιά τυπική μορφή φαίνεται στό σχήμα Ι.8 .Μέ διακεκομένη γραμμή είναι τό άργά μεταβαλλόμενο.

'Η βασική μέθοδος μέ τήν όποία άντιμετωπίζεται τό θέμα είναι προσεγγιστική,μέ τήν χρήση δηλαδή σειρών.Είσάγονται δύο άνεξάρτητες μεταβλητές ή τ καί ή t , ή τ εί-ή βραδέως μεταβαλόμενη καί ή t ή ταχέως. Οί άναδρομικοί τύποιπού δίνουν τούς όρους τής σειράς είναι διαφορικές έξισώσεις πού λύνονται άρκετά δύσκολα,όσο άνεβαίνουμε στήν τάξη τών όρων τής σειράς.

II. ΥΠΑΡΜΟΝΙΚΕΣ

Τό φαινόμενο τών ύπαρμονικών έχει παρατηρηθεί άρκετές φορές στή φύση , μιά καί ή τελευταία είναι γεμάτη άπό μή γραμμικά συστήματα.Θά άναφέρουμε μερικά συστήματα όπου μπορούμε νά τίς παρατηρήσουμε.

Στήν ήλεκτρολογία έχει παρατηρηθεί σέ κυκλώματα μέ λυχνίες,όταν οί τελευταίες δουλεύουν στή μή γραμμική περιοχή τους.

Ή λειτουργία τής λυχνίας περιγράφεται άπό τήν έξίσωση τού Van der Pol ,ή όποία περιγράφει καί ένα πλήθος άπό άλλα μή γραμμικά φαινόμενα.

Ύπαρμονικές ταλαντώσειςσυναντάμεόταν έχουμε ένα σώμα κρεμασμένο άπό ένα μή γραμμικό έλατήριο.Τό φαινόμενο αύτό περιγράφεται άπό τήν διαφορική έξίσωση τού Duffing ,μία έπίσης πολύ σπουδαία έξίσωση στά μή γραμμικά συστήματα.

Ένα έκκρεμές τού όποίου τό σημείο στηρίξεως ύποβάλλεται σέ ταλάντωση έμφανίζει καί αύτό ύπαρμονικές.

Τά δύο τελευταία συστήματα θά άναφερθούν σάν παραδείγματα στήν παρούσα έργασία.

Στά βιολογικά συστήματα έχει παρατηρηθεί τό φαινόμενο αύτό πάρα πολύ.Στά συστήματα αύτά ή μή γραμμικότητα είναι ένας σημαντικός παράγοντας πού τά χαρακτηρίζει.

Έχει άποδειχθεί πειραματικά ότι τό άνθρώπινο αύτί άκούει συχνότητες πού δέν ύπάρχουν στόν ήχο ό όποίος φθάνει μέχρι τό τύμπανο. Αύτό όφείλεται στήν μή γραμμική λειτουργία τού τυμπάνου.

Κυκλώματα γιά διαίρεση συχνότητος χρησιμοποιούνται σέ ψηφιακά συστήματα καί είναι μεγάλου ένδιαφέροντος έπειδή μπορούν νά λειτουργήσουν σέ μικροκυματικές περιοχές.

Πάνω στό πρόβλημα τών ύπαρμονικών έχουν γραφτεί πολλές έργασίες.'Αλλες χρησιμοποιούν μέθοδο μέ σειρές , δηλαδή προσπαθούν νά βρούν άναλυτικά τό άνάπτυγμα Fourier τής έξόδου καί περιορίζονται στούς πρώτους όρους τής σειράςκαί άλλες άναφέρονται σέ ποιοτικά χαρακτηριστικά τής έξόδου όπως ύπαρξη,εύστάθεια κ.λ.π.. δίχως νά βρίσκουν άναλυτικά τήν έξοδο.

Οί περισσότερες έργασίες όμως άναφέρονται σέ συστήματα πού περιέχουν μιά παράμετρο ε ,"αρκετά μικρή",δηλαδή σέ συστήματα μέ μικρές διαταραχές.Βγάζουν διάφορα συμπεράσματα γιά $\varepsilon=0$ καί κατόπιν βάσει όρισμένων συνθηκών μεταφέρουν τά συμπεράσματα αύτά καί γιά μικρές τιμές τού ε .

'Η μικρή τιμή τής παραμέτρου χρειάζεται καί στήν σύγκληση τής μεθόδου μέ τίς σειρές καί γιά νά είναι άξιόπιστα τά άποτελέσματα πού θά πάρουμε όταν κρατήσουμε μόνο τούςπρώτους όρους τής σειράς.

Πολλές έργασίες άναφέρονται σέ είσόδους μέ συχνότητα κοντά σέ πολλαπλάσια τής ίδιοσυχνότητος τού συστήματος.

Δύο πολύ σημαντικές έργασίες έχει γράψει ό HSU πού είναι ένας άξιόλογος μαθηματικός.Τό σημαντικό στίς έργασίες αύτές είναι ότι προσπαθεί νά βρεί άκριβείς λύσεις σέ διάφορες έξισώσεις γιά όρισμένες είσόδους.'Η μία έργασία [4] άναφέρεται στήν έξίσωση τού Duffing ,όπου μέ χρήση έλλειπτικών συναρτήσεων προσπαθεί νά βρεί άκριβείς λύσεις τής έξισώσεως αύτής . .

Πολλές έργασίες έχει γράψει ό STRUBLE στό θέμα τών ύπαρμονικών.

Σέ μιά συνεργασία του μέ τόν HEINBOCKEL άναφέρεται σέ διαφορικές τού τού τύπου $\ddot{x}+g(x)=F(t)$ όπου ή $F(t)$ παρουσιάζει συμετρίες.Τό πλεονέκτημα τής έργασίας αύτής είναι ότι δέν άναφέρεται σέ συστήματα μέ μικρές διαταραχές άλλά ή $g(x)$ μπορεί νά είναι όποιαδήποτε συνάρτηση τού x .

'Η διπλωματική άποτελεί γενίκευση τής έργασίας αύτής σέ συστήματα $\ddot{x}+g(x,\dot{x},t)=0$ όπου ή συνάρτηση $g(x,\dot{x},t)$ παρουσιάζει συμμετρίες.

'Ο STRUBLE δέν έχει περιοριστεί σέ μία μέθοδο,προσπαθεί νά άντιμετωπίσει τό πρόβλημα άπό πολλές πλευρές ,στήν βιβλιογραφία άναφέρονται έργασίες του.

Μέ τό πρόβλημα έχουν άσχοληθεί καί πολλοί Ρώσοι έπιστήμονες .

Στήν βιβλιογραφία ύπάρχουν πολλά θεωρήματα τά όποία μάς έξασφαλίζουν τήν ταλάντωση τής έξόδου.Τά θεωρήματα αύτά άν καί είναι πάρα πολύ βασικά,δυστυχώς δέν μπορούν νά έφαρμοστούν στό πρόβλημά μας .Ό λόγος είναι ότι δέν μάς έξασφαλίζουν ότι τό Τ θά είναι ή έλάχιστη περίοδος τής έξόδου όταν δέν είναι ή έλάχιστη τής είσόδου.

Τό πρόβλημα αύτό δέν τό άντιμετωπίζει ή μέθοδος πού άκολουθεί γιατί άποδεικνύει τό ότι ή Τ είναι ή έλάχιστη περίοδος έξόδου.

Ή μέθοδος βέβαια δέν είναι έφαρμόσιμη παντού,κάτι πού ίσχύει γιά κάθε μέθοδο,όμως περιλαμβάνει ένα άρκετά μεγάλο άριθμό β-βαθμίων συστημάτων.

IIα.

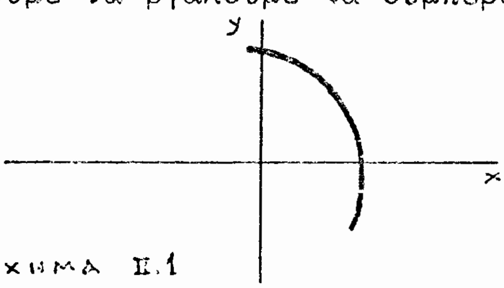
Κύρια ἀποτελέσματα

Θά μελετήσουμε τό πρόβλημα τών ὑπαρμονικών,σέ συστήματα πού περιγράφονται ἀπό διαφορική ἐξίσωση τού τύπου:

$$\begin{aligned}\dot{y}+g(x,y,t)&=0\\ \dot{x}&=y\end{aligned} \qquad .1$$

ὅπου ἡ $g(x,y,t)$ εἶναι περιοδική ὡς πρός t καί παρουσιάζει ὁρισμένες συμμετρίες,πού θά ὁρίσουμε παρακάτω.

Ἡ μελέτη γίνεται στό ἐπίπεδο τών φάσεων x,y ὅπου προσπαθούμε νά βγάλουμε τά συμπεράσματά μας παρακολουθόντας τήν τροχιά τού συστήματος.Οἱ ὁρισμοί τών ἐννοιών "ἐπίπεδο φάσεων" καί "τροχιά",δόθηκαν ὅταν ἔγινε ἡ περιγραφή τού φαινομένου τών ταλαντώσεων στό 1º κεφάλαιο.



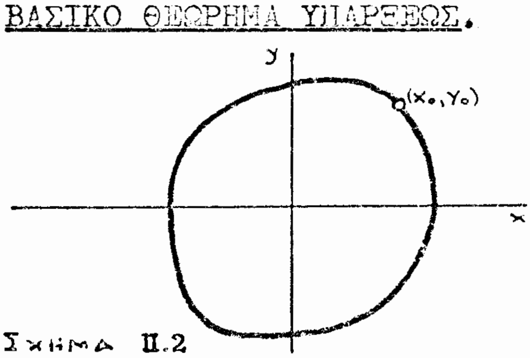
Σχημα II.1

ΟΡΙΣΜΟΣ Ὑπαρμονική θά καλούμε ἐκείνη τήν λύση πού ἔχει περίοδο ἀκέραιο πολλαπλάσιο τῆς περιόδου τῆς εἰσόδου.

Ὁ ὁρισμός αὐτός ἀναφέρεται στήν περίοδο καί ὄχι στήν συχνότητα τῆς ἐξόδου.Μιά ἔξοδος πού πληρεῖ τόν ὁρισμό εἶναι δυνατόν νά ἔχει ὑπαρμονικές συχνότητες μόνο,ὑπέρ ὑπαρμονικές,ἤ καί τά δύο εἴδη μαζί.

Ἀκολουθοῦν τό βασικό θεώρημα ὑπάρξεως ὑπαρμονικών καί οἱ παραλαγές του στήν περίπτωση συμμετριών.

ΒΑΣΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΥΠΑΡΞΕΩΣ. Ἔστω τό σύστημά μας .1 . Ἄς παρακολουθήσουμε τήν τροχιά, ξεκινάει ἀπό τό τό σημείο x_0,y_0,ἄν ἱκανοποιεῖ τίς ἑξεῖς δύο συνθήκες



Σχημα II.2

Υ 1 : Ἡτροχιά "κλείνει", δηλαδή περνάει πάλι ἀπό τό x_0,y_0.

Υ 2 : Ὁ χρόνος πού χρειάζεται γιά νά "κλείσει" εἶναι Τ ,ὅπου Τ ἀκέραιο πολλαπλάσιο περιόδου τῆς εἰσόδου, τότε:

Σ : Ἡ λύση μας εἶναι ὑπαρμονική. Μάλιστα ἄν $T = \kappa \cdot T_{\epsilon\iota\sigma}$ τότε εἶναι κ-ὑπαρμονική.

Ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος εἶναι πάρα πολύ ἁπλή.
Ἄν ἡ τροχιά κλείσει σέ χρόνο T τότε τό σύστημά μας ἀπό ἐκεῖ καί πέρα περιγράφεται:

$$\dot{y} + g(x,y,t) = 0$$
$$\dot{x} = y$$
$$x(T) = x_0,\quad y(T) = y_0$$

ἄν κάνουμε ἀντικατάσταση $t = \tau + T$ τότε :

$$\left.\begin{array}{l} y' + g(x,y,\tau+T) = 0 \\ x' = y \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y' + g(x,y,\tau) = 0 \\ x' = y \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \end{array}\right.$$

μέ (′) συμβολίζουμε παραγώγιση ὡς πρός τ .
Ἡ τελευταία ὅμως διαφορική ἐξίσωση εἶναι ἴδια μέ τήν πρώτη, θά ἔχουν ἑπομένως καί τήν ἴδια λύση γιά $\tau = t$, δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l} x(\tau) = x(t) \\ y(\tau) = y(t) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(t-T) = x(t) \\ y(t-T) = y(t) \end{array}\right.$$

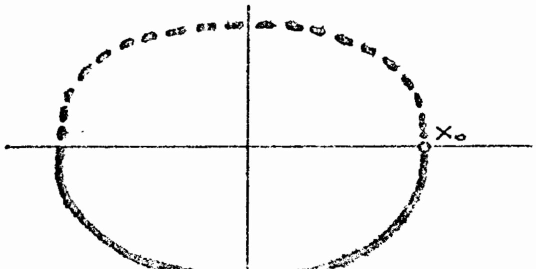
ἐπειδή ἡ σχέση αὐτή ἰσχύει γιά κάθε t σημαίνει ὅτι τό T εἶναι περίοδος τῆς ἐξόδου.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Τό βασικό θεώρημα ὅπως εἴδαμε ἔχει δύο συνθῆκες πού πρέπει νά ἐκπληρώνονται γιά νά ἔχουμε ὑπαρμονική, τίς Y1, Y2 .
Οἱ δύο αὐτές συνθῆκες γίνονται μία, στήν περίπτωση πού ἡ συνάρτηση $g(x,y,t)$ παρουσιάζει συμμετρίες.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΤΙΑΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ</u> Σάν τέτοια συμμετρία ὁρίζουμε τήν συνθήκη:

$$g(x,-y,-t) = g(x,y,t)$$

Ἡ συνθήκη αὐτή σημαίνει τό ἑξῆς:
Ἄν τό σύστημά μας γιά t στό μέλλον περνάει ἀπό τό σημεῖο (x,y) τότε γιά t στό παρελθόν θά περνάει ἀπό τό $(x,-y)$. Τό $x(t)$ θά εἶναι ἑπομένως ἄρτια συνάρτηση καί τό $y(t)$ περριτή.



ΣΧΗΜΑ II.3

Ἄν λοιπόν ξεκινήσουμε ἀπό τό σημεῖο $(x_0, 0)$ τοῦ ἄξονα x (ἀρχικό σημεῖο τῆς διαφ. ἐξίσ.) τότε:

Y : Ἄν ἡ τροχιά τμήση τόν ἄξονα x σέ χρόνο $\frac{T}{2}$ τότε

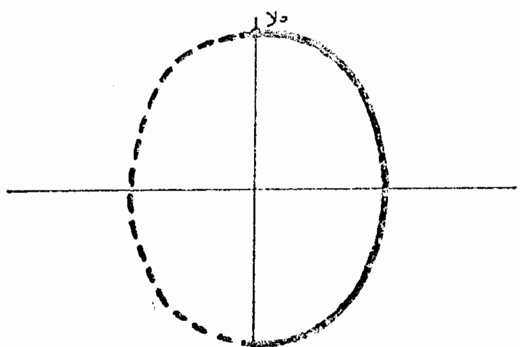
Σ : Ἡ λύση εἶναι ὑπαρμονική.
Γιά τό T ἰσχύει ὅτι καί στό βασικό θεώρημα.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἁπλή. Ἂν παρατηρήσουμε τό σχῆμα τότε τήν κάτω καμπύλη τήν γράφει τόσύστημά μας γιά t στό μέλλον. Γιά t στό παρελθόν γράφει τήν συμμετρική της (διακεκομμένη γραμμή). Δηλαδή συμπληρώνει κύκλο σέ χρόνο T. Ἱκανοποιεῖται δηλαδή τό βασικό θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΕΡΡΙΤΗΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ. Ἡ συμετρία αὐτή ὁρίζεται ἀπό τήν συνθήκη:

$$g(-x,y,-t) = -g(x,y,t)$$

Ἡ συνθήκη αὐτή σημαίνει ὅτι, ἄν γιά t στό μέλλον ἡ τροχιά περνάει ἀπό τό σημεῖο (x,y) τότε γιά t στό παρελθόν περνάει ἀπό τό σημεῖο $(-x,y)$.



ΣΧΗΜΑ II.3

Τό $x(t)$ θά εἶναι περριτή συνάρτηση καί τό $y(t)$ ἄρτια.

Ἂν σάν ἀρχικό σημεῖο πάρουμε τό $(0, y_0)$ τοῦ ἄξονα y, τότε:

Υ : Ἂν ἡ τροχιά τμήση τόν ἄξονα y σέ χρόνο $\frac{T}{2}$, τότε:

Σ : Ἡ λύση μας εἶναι ὑπαρμονική.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι ἴδια μέ τήν ἀπόδειξη τοῦ προηγούμενου θεωρήματος.

Αὐτά ἦταν τά θεωρήματα τά ὁποῖα θά χρησιμοποιήσουμε. Θά ἀσχοληθοῦμε μέ περιπτώσεις τῶν δύο τελευταίων θεωρημάτων ὅπου καί ἐφαρμόζεται ἡ μέθοδός μας.

Ἀκολουθοῦν τώρα δύο θεωρήματα τά ὁποῖα εἶναι βασικά γιά τήν ἐφαρμογή τῆς μεθόδου. Τό πρῶτο, εἶναι γνωστό θεώρημα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ καί τό δεύτερο εἶναι ἡ κεντρική ἰδέα τῆς διπλωματικῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΥΣ

Τό θεώρημα ἀναφέρεται στή συνέχεια τῆς λύσεως μιᾶς διαφορικῆς ἐξισώσεως ὡς πρός κάποια παράμετρο.

Ἔστω ἡ διαφορική μας ἐξίσωση σέ μητρική μορφή:

$$\bar{x} = f(\bar{x},t,\mu)$$
$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

ὅπου τό μ εἶναι μιά παράμετρος.

D διάστημα τοῦ χώρου $(\bar{x},t)$. $D\mu$ τό σύνολο τῶν $(\bar{x},t,\mu)$ πού ἱκανοποιοῦν τήν σχέση $(\bar{x},t) \in D$

Υ1 : ή $\bar{f}$ συνεχής στό Dμ καί φραγμένη.

Υ2 : ή έξίσωση έχει μοναδική λύση στό διάστημα D.

τότε:

Σ : ή λύση είναι συνεχής ώς πρός τήν παράμετρο μ .

Σάν παράμετρος μπορεί νά θεωρηθή καί ή άρχική τιμή,τό άρχικό διάνυσμα.

ΑΠΑΓΟΡΕΥΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ.

Άς δούμε τώρα πώς έφαρμόζεται τό θεώρημα συνεχείας στήν δική μας περίπτωση.

$$\dot{y} + g(x,y,t,\mu) = 0$$

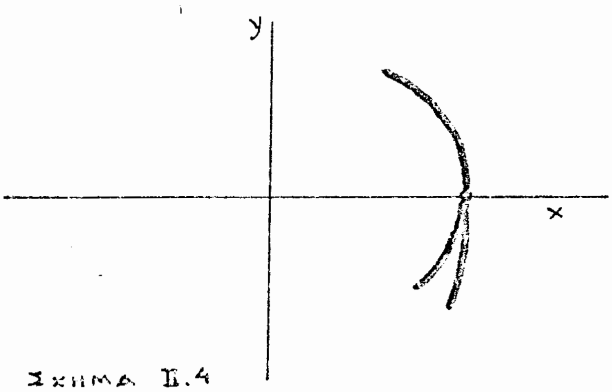
$$\dot{x} = y$$

Ή ύπόθεση Υ1 έξαρτάται άπό τήν μορφή πού έχει ή συνάρτηση $g(x,y,t,\mu)$,δέν μπορούμε νά πούμε τίποτα γιά αύτήν.

Γιά τήν Υ2 όμως μπορούμε νά πούμε ορισμένα πράγματα.

Άν κοιτάξουμε τό σχήμα II.4 γιά νά μήν έχουμε μοναδική λύση ή τροχιά πρέπει νά περνάει άπό άνώμαλα σημεία.

Τά σημεία αύτά ίκανοποιούν τήν συνθήκη : $\dot{x} = \dot{y} = 0$



Σχημα II.4

.Θά πρέπει λοιπόν ή λύση μας νά μήν περνάει άπό τέτοια σημεία.Άς προσπαθήσουμε νά προσδιορίσουμε περισσότερο τά σημεία αύτά.

$$\left.\begin{matrix} \dot{y} = 0 \\ \dot{x} = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -g(x,y,t,\mu) = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow g(x,0,t,\mu) = 0$$

Άν σάν άπαγορευμένο διάστημα όρίσουμε τό:

Απ = $(x / x: \; g(x,0,t,\mu) = 0$ γιά κάθε t καί τό μ σέ κάποιο διάστημα πού μας ένδιαφέρει.).Τό διάστημα αύτό στό έπίπεδο (x,y) κείται στόν άξονα x . Άν ή τροχιά μας δέν περνάει άπό τέτοια σημεία τού άξονα x ή λύση μας είναι συνεχής ώς πρός μ .

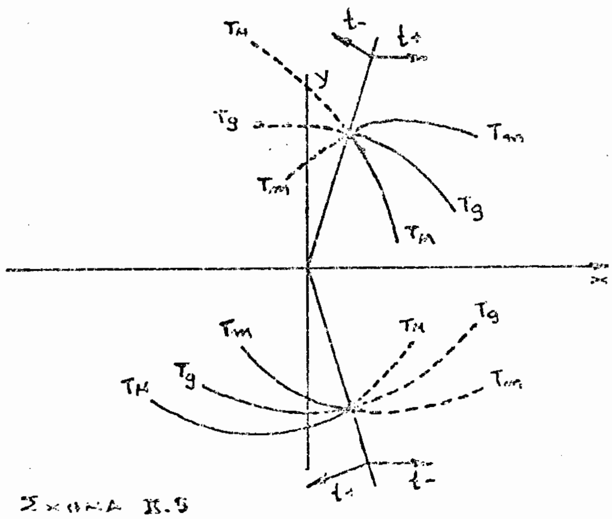
ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΤΡΟΧΙΩΝ.

Ή πρόταση αύτή άποτελεί τήν κεντρική ίδέα τής διπλωματικής καί πάνω της στηρίζεται όλη ή μέθοδος πού προτείνεται.

Έστω τά τρία συστήματα:

$$\dot{y}+m(x,y)=0 \qquad \dot{y}+g(x,y,t)=0 \qquad \dot{y}+M(x,y)=0$$
$$\dot{x}=y \qquad \dot{x}=y \qquad \dot{x}=y$$
$$x(0)=x_0 \quad , \quad y(0)=y_0$$

Άν γιά τά συστήματα αύτά ίσχύουν οί έξείς ύποθέσεις:



Σχημα Π.5

Υ 1 : οί συναρτήσεις $m(x,y)$, $g(x,y,t)$ καί $M(x,y)$ είναι συνεχείς καί φραγμένες σέ ένα διάστημα (x, y, t).

Υ 2 : γιά τίς συναρτήσεις ίσχύει $m(x,y) < g(x,y,t) < M(x,y)$

τότε:

Σ : Ή σχετική θέση τών τροχιών τών τριών συστημάτων είναι αύτή τού σχήματος Π.5 .

Τό σχήμα περιλαμβάνει τίς περιπτώσεις πού τό άρχικό σημείο βρίσκεται στό πάνω ή κάτω ήμιεπίπεδο καί άν ό χρόνος πηγαίνει στό μέλλον ($t+$), ή άν πηγαίνει στό παρελθόν ($t-$).

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> Θά πρέπει νά προσέξουμε ότι οί δύο συναρτήσεις $m(x,y)$ καί $M(x,y)$ είναι μόνο συναρτήσεις τών x καί y καί όχι τού χρόνου t .

Ή άπόδειξη τής προτάσεως αύτής βρίσκεται στό μαθηματικό παράρτημα σελίδα 53 .

Έκείνο πού πετύχαμε μέ τό παραπάνω θεώρημα ήταν νά "άναγκάσουμε" κατά κάποιον τρόπο ή τροχιά τού συστήματος g, T_g, νά άκολουθήση τόν δρόμο πού "χαράζουν" οί άλλες δύο τροχιές T_m καί T_M .

<u>ΧΡΟΝΟΣ ΤΟΜΗΣ</u>

Ἀρχίζουμε τώρα τήν ἀνάπτυξη τής μεθόδου. Θά ἀναφερθοῦμε στήν περίπτωση τής ἄρτιας συμμετρίας, τά ἴδια περίπου πράγματα ἰσχύουν καί γιά τήν περιττή συμμετρία. Ὅπου ὑπάρχει διαφορά θά ἀναφερόμαστε καί στήν συμμετρία αὐτή.

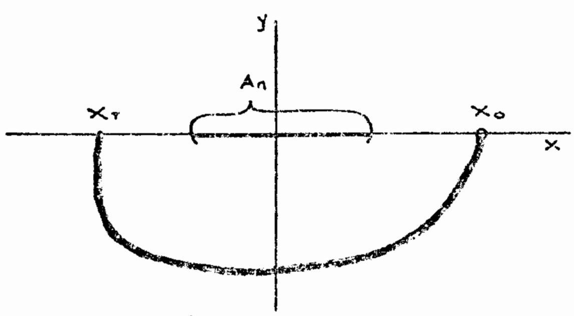
Ἔστω λοιπόν τό σύστημά μας:

$$\dot{y} + g(x, y, \omega t) = 0$$

$$\dot{x} = y$$

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0$$

ὅπου $g(x,-y,-\omega t) = g(x, y, \omega t)$ καί τό ω εἶναι ἡ συχνότητα εἰσόδου.



Σχημα II.6

Θά προσπαθήσουμε νά βροῦμε τίς συνθῆκες γιά νά ὑπάρχει συχνότητα ω^* τέτοια ὥστε ὁ χρόνος ἀπό τό x_0 ἕως τό x_T νά εἶναι $\frac{T}{2}$. Τόν χρόνο αὐτόν θά τόν καλέσουμε <u>χρόνο τομής</u> καί θά τόν συμβολίζουμε μέ $\Delta(\omega)$. Εἶναι βέβαια λογικό νά τόν θεωρήσουμε σάν συνάρτηση τοῦ ω.

Θά κρατήσουμε τό x_0 σταθερό καί θά μεταβάλλουμε τήν ω, μέχρι νάπετύχουμε ὁ χρόνος τομής $\Delta(\omega)$ νά γίνει $\frac{T}{2}$. Ἄς δοῦμε ὅμως λίγο καλύτερα τό $\frac{T}{2}$:

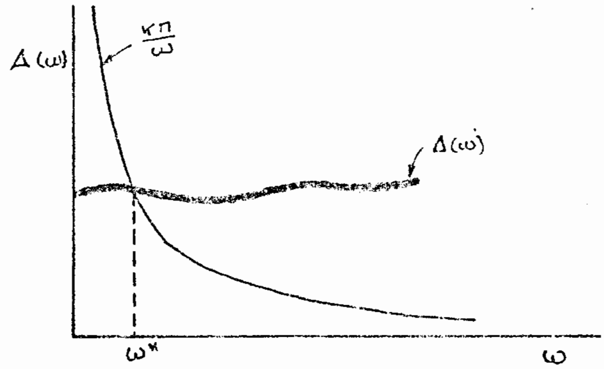
$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2} \cdot k T_{\varepsilon\iota\sigma} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{2\pi}{\omega^*} = \frac{k\pi}{\omega^*} \longrightarrow \Delta(\omega^*) = \frac{k\pi}{\omega^*}$$

Ἀπό τήν διαφορική μας ἐξίσωση ἔχουμε:

$$\dot{x} = y \longrightarrow \frac{dx}{dt} = y \longrightarrow dt = \frac{dx}{y} \longrightarrow \Delta(\omega) = \int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{y}$$

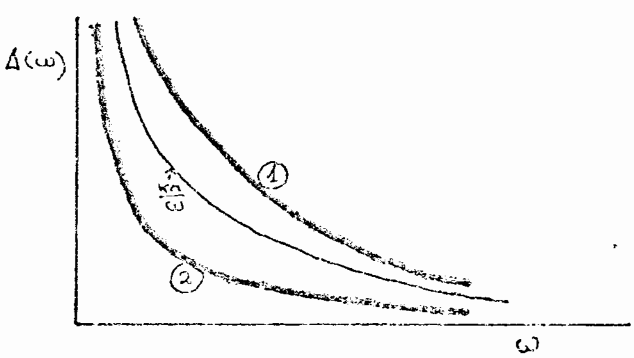
Ἄν προσέξουμε, γιά $x = x_0$ καί $x = x_T$ ἔχουμε $y(x_0) = y(x_T) = 0$. Τό ὁλοκλήρωμα ἑπομένως $\int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{y}$, δέν εἶναι ἕνα ἁπλό ὁλοκλήρωμα, ἀλλά γενικευμένο Cauchy - Riemann καί ὑπάρχει, ἄν ἡ τροχιά μας δέν περνάει ἀπό σημεῖα τοῦ ἀπαγορευμένου διαστήματος A_π. Ἄν ἑπομένως τό x_0 καί τό x_T δέν ἀνήκουν στό A_π δέν ἔχουμε πρόβλημα καί ὁ χρόνος $\Delta(\omega)$ θά εἶναι πεπερασμένος. Οἱ συναρτήσεις $x(t)$ καί $y(t)$ εἶναι συνεχεῖς ὡς πρός τήν παράμετρο ω σύμφωνα μέ τό θεώρημα συνεχείας πού ἀναφέραμε. <u>Ἡ $\Delta(\omega)$ σάν ὁλοκλήρωμα συνεχοῦς συναρτήσεως εἶναι συνεχής συνάρτηση ὡς πρός τήν παράμετρο ω</u>.

'Ας ύποθέσουμε ότι ξέρουμε τήν μορφή τής $\Delta(\omega)$. Τήν σχεδιάζουμε στό έπίπεδο $(\Delta(\omega), \omega)$. Πάνω στήν καμπύλη αύτή ύπάρχει καί τό σημείο στό όποίο παρουσιάζεται ύπαρμονική. Τό σημείο αύτό ίκανοποιεί καί τήν σχέση:



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.7

$\Delta(\omega^*) = \frac{\kappa\pi}{\omega^*}$ Δηλαδή βρίσκεται πάνω στήν ύπερβολή $\frac{\kappa\pi}{\omega}$. 'Η τομή τών δύο καμπυλών μάς δίνει τό σημείο ω^*, όπως βλέπουμε καί στό σχήμα ΙΙ.7. Τό πρόβλημά μας άπό έδώ καί πέρα είναι νά έξασφαλίσουμε τήν τομή τών δύο καμπυλών.



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.8

Στό σχήμα βλέπουμε τίς δυνατές περιπτώσεις γιά νά μήν έχουμε τομή.

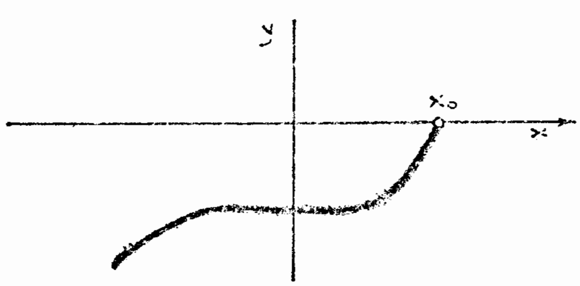
Μαθηματικώς έκφράζονται άπό τίς σχέσεις:

① $\lim_{\substack{\omega\to\infty \\ \omega\to 0}} \left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\pi}\right| < 1$

② $\lim_{\substack{\omega\to\infty \\ \omega\to 0}} \left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\pi}\right| > 1$

Τά όρια, ούσιαστικά συγκρίνουν τίς ταχύτητες συγκλίσεως τής ύπερβολής μέ τήν $\Delta(\omega)$, στό άπειρο καί στό μηδέν. Γιά νά ύπάρχει τομή θά πρέπει νά μήν ίκανοποιείται καμία άπό τίς δύο σχέσεις ① καί ②.

Αύτές τίς σχέσεις θά μπορέσουμε νά τίς έλεγξουμε μόνο άν προσπαθήσουμε νά πλησιάσουμε ποσοτικά τήν συνάρτηση $\Delta(\omega)$.



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.9

Μέχρι τώρα δεχτήκαμε σιωπηλά ότι κάθε τροχιά πού ξεκινάει άπό τό x_0 τέμνει τόν άξονα x. Αύτό δέν είναι άπαραίτητο νά συμβαίνει, όπως στό σχήμα ΙΙ.9.

Καταλείξαμε βάσει τών παραπάνω στά έξείς δύο προβλήματα πού πρέπει νά λύσουμε:

α. 'Η τροχιά μας τέμνει τόν άξονα x ;

β. 'Ο χρόνος τομής ίκανοποιεί τίς συνθήκες ① ή ②, ή όχι ;

Αύτά τά δύο προβλήματα, μάς τά λύνουν οί τροχιές φραγής καί οί συναρτήσεις φραγής, πού θά άναφέρουμε άμέσως.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΤΡΟΧΙΕΣ ΦΡΑΓΗΣ

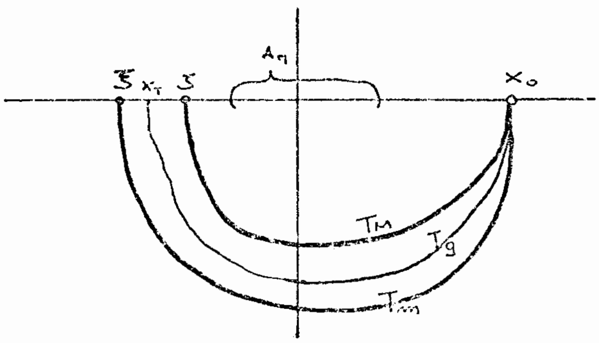
Έστω ότι βρήκαμε δύο συναρτήσεις $M(x,y)$ καί $m(x,y)$ (συναρτήσεις φραγής) τέτοιες ώστε:

$$m(x,y) < g(x,y,\tau) < M(x,y) \qquad \tau = \omega \cdot t$$

κάτι τέτοιο είναι πάντοτε δυνατόν έπειδή ή $g(x,y,\tau)$ είναι φραγμένη ώς πρός τόν χρόνο t .

Άν λύσουμε τώρα τίς δύο έξισώσεις:

$$\dot{y} + m(x,y) \left(\text{ή } M(x,y) \right) = 0$$
$$\dot{x} = y$$
$$x(0) = x_0 \ , \ y(0) = 0$$



ΣΧΗΜΑ II.10

τότε οί τροχιές τους θά είναι όπως στό σχήμα II.10,βάσει τοῦ θεωρήματος περί σχετικής θέσεως τροχιών.Οί δύο τροχιές T_M καί T_m (τροχιές φραγής) είναι άνεξάρτητες τοῦ ω .

Ένῶ στήν άρχή εἴχαμε ένα σύστημα ποῦ δέν μπορούσαμε νά τό έπιλύσουμε,τώρα έχουμε δύο συστήματα τά όποία είναι έν γένει πολύ πιό εὔκολο νά λυθοῦν καί αὐτό φαίνεται άπό τό έξής :

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \dot{x} = \frac{dy}{dx} \cdot y$$

Έτσι τά δύο συστήματά μας,καταλύγουν στίς πρωτοβάθμιες έξισώσεις :

$$\frac{dy}{dx} \cdot y + m(x,y) \left(\text{ή } M(x,y) \right) = 0$$

$$y(x_0) = 0$$

Οί συναρτήσεις m , M , έν γένει δέν είναι μονοσήμαντα όρισμένες ,όπότε τίς διαλέγουμε έτσι ώστε νά λύνονται εὔκολα οί δύο διαφορικές.

Ή έπίλυση τών δύο έξισώσεων μάς δίνει <u>άναλυτικά</u> τίς δύο τροχιές T_m καί T_M .

Άφοῦ έχουμε άναλυτικά τίς τροχιές μποροῦμε νά έλέγξουμε άν ὑπάρχουν τά σημεία ξ καί ζ . Μέχρι στιγμής λοιπόν ξέρουμε ότι τό σύστημά έχει τροχιά ποῦ τέμνει τόν άξονα x .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Άν δέν ὑπάρχει τό σημείο ζ δηλαδή ή T_M τροχιά δέν τέμνει τόν άξονα x ,τότε οὔτε καί ή τροχιά τοῦ συστήματός μας θά τέμνει τόν x .Δέν μπορεί νά έμφανιστεί ὑπαρμονική.

Όσον άφορά τήν συνέχεια τώρα,άν τά σημεία ξ , ζ εὑρίσκονται ἔξω ἀπό τό διάστημα $A\eta$ τό ἴδιο θά ἰσχύει καί γιά τό x_T.

Ἀπομένει τώρα νά ἐκφράσουμε καί ποσοτικά τήν συνάρτηση $\Delta(\omega)$.

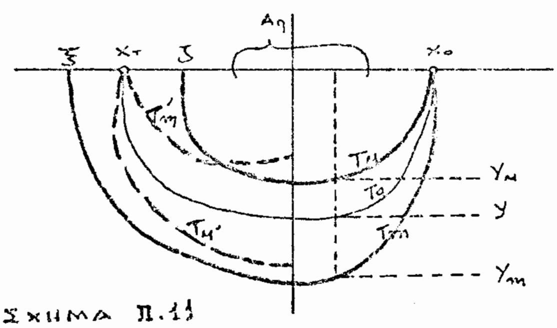
<u>ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΧΡΟΝΟΥ ΤΟΜΗΣ</u>

Ὅπως εἴδαμε ὁ χρόνος τομῆς εἶναι : $\Delta(\omega) = \int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{y}$.

Ἐπειδή ὑπάρχει διαφορά στόν τρόπο ὑπολογισμοῦ τῶν φραγμάτων στίς δύο συμμετρίες θά ἀναφερθοῦμε σέ καθε μία ξεχωριστά.

<u>Ἄρτια συμμετρία.</u>

$$\Delta(\omega) = \int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{y} = \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y} + \int_{0}^{x_T} \frac{dx}{y}.$$



ΣΧΗΜΑ Π.11

ἀπό τό σχῆμα ἔχουμε ὅτι :

$$\left|\frac{1}{y_M}\right| > \left|\frac{1}{y}\right| > \left|\frac{1}{y_m}\right| \longrightarrow$$

$$\left|\frac{dx}{y_M}\right| > \left|\frac{dx}{y}\right| > \left|\frac{dx}{y_m}\right|.$$

$dx < 0$ καί $y_i < 0 \longrightarrow \frac{dx}{y_i} > 0 \longrightarrow \left|\frac{dx}{y_i}\right| = \frac{dx}{y_i}$ $\quad i = m, M,$ κενό

$$\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_M} > \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y} > \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_m}$$ ἔτσι :

$$\tau_1'(x_0) \triangleq \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_M} \quad , \quad \tau_2'(x_0) \triangleq \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_m}$$

Οἱ ποσότητες $\tau_1'(x_0)$, $\tau_2'(x_0)$ μποροῦν νά ὑπολογιστοῦν καί ἄν τό x_0 δέν εἶναι ἀνώμαλο σημεῖο ,δηλαδή $M(x_0,0) \neq 0$, $m(x_0,0) \neq 0$ τά $\tau_1'(x_0)$, $\tau_2'(x_0)$ εἶναι πεπερασμένες ποσότητες.

Ἀπό τό 0 ἕως τό x_T,ὑπάρχει τό πρόβλημα ὅτι δέν ξέρουμε τό σημεῖο x_T .Ἄν ὑπολογίσουμε τούς χρόνους τῶν δύο τροχιῶν T_m' καί T_M' πού φαίνονται στό σχῆμα Π.11 ,γιά κάθε x_T σημεῖο,μέσα στό διάστημα (ξ, J) καί πάρουμε τήν ἐλάχιστη καί μέγιστη τιμή τῶν χρόνων αὐτῶν τότε βρήκαμε καί φράγματα γιά τόν ὑπόλοιπο χρόνο.

Συγκεκριμένα :

$$\tau_1''(x_0) \triangleq \max_{\xi < x_T < J} \int_0^{x_T} \frac{dx}{y_m'} > \int_0^{x_T} \frac{dx}{y} > \min_{\xi < x_T < J} \int_0^{x_T} \frac{dx}{y_M'} \triangleq \tau_2''(x_0)$$

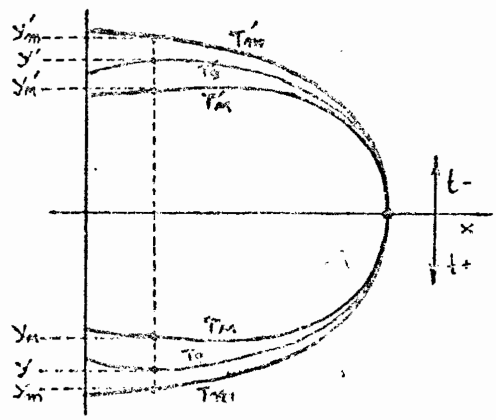
Ἄν τά σημεῖα πού ἱκανοποιοῦν $M(x_T,0)=0$ καί $m(x_T,0)=0$ δέν βρίσκονται στό διάστημα (ξ, J), τότε οἱ ποσότητες αὐτές εἶναι πεπερασμένες.

Ὁρίζουμε: $\tau_1(x_0) = \tau_1'(x_0) + \tau_1''(x_0)$, $\tau_2(x_0) = \tau_2'(x_0) + \tau_2''(x_0) \longrightarrow$

$$\tau_1(x_0) > \int_{x_0}^{x_T} \frac{dx}{y} > \tau_2(x_0)$$ ὁπότε $\tau_1(x_0) > \Delta(\omega) > \tau_2(x_0)$.

Οἱ δύο συναρτήσεις $\tau_1(x_0)$ καί $\tau_2(x_0)$ βλέπουμε ότι είναι συναρτήσεις τού x_0.

Περιττή συμμετρία. Τά πράγματα στήν περίπτωση αὐτή μπορούν νά ἁπλοποιηθούν συμαντικά άν θεωρήσουμε ότι οἱ τροχιές φραγής ξεκινούν ἀπό τό σημείο x_0 πού τέμνει ή τροχιά τού συστήματός μας τόν άξονα x.



Σχημα II.12

Ξεκινόντας τό σύστημά μας ἀπό τό y_0, θά φθάσει τό x_0 μετά ἀπό κάποιο χρόνο t_0. Έτσι πρός τά πάνω, είναι κίνηση στό παρελθόν ($t-$) καί πρός τά κάτω, κίνηση στό μέλλον ($t+$).
Ή διάταξη τών τροχιών θά είναι αὐτή τού σχήματος II.12. Δέν είναι άναγκαίο νά είναι τό σχήμα συμμετρικό ώς πρός τόν x.

Τόν χρόνο τομής μπορούμε νά τόν φράξουμε ώς έξής:

$$\tau_1(x_0) \triangleq \int_0^{x_0} \frac{dx}{y'_M} + \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_M} > \int_0^{x_0} \frac{dx}{y'} + \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y} > \int_0^{x_0} \frac{dx}{y'_m} + \int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y_m} \triangleq \tau_2(x_0)$$

Άν τό x_0 δέν είναι άνώμαλο σημείο τών M καί m, τότε τά φράγματα είναι πεπερασμένα:

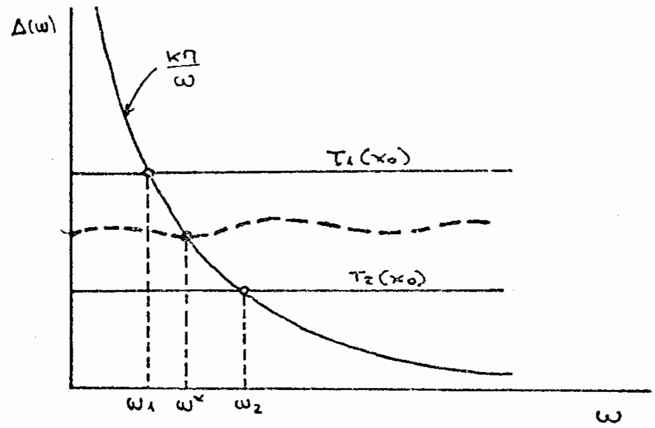
Εάν τά $\tau_1(x_0)$ καί $\tau_2(x_0)$, είναι πεπερασμένα, γιά τίς δύο συνθήκες (1) καί (2) μπορούμε νά πούμε:

$$\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta} > \frac{\omega\cdot\tau_2(x_0)}{\kappa\eta} \longrightarrow \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta}\right| \geq \lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{\omega\cdot\tau_2(x_0)}{\kappa\eta}\right| = \infty \longrightarrow$$
$$\lim_{\omega\to\infty}\left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta}\right| = \infty > 1$$

$$\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta} < \frac{\omega\cdot\tau_1(x_0)}{\kappa\eta} \longrightarrow \lim_{\omega\to 0}\left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta}\right| \leq \lim_{\omega\to 0}\left|\frac{\omega\cdot\tau_1(x_0)}{\kappa\eta}\right| = 0 \longrightarrow$$
$$\lim\left|\frac{\omega\cdot\Delta(\omega)}{\kappa\eta}\right| = 0 < 1$$

δέν ἱκανοποιείταιδηλαδή ούτε ή (1), ούτε ή (2).
πού σημαίνει ότι γιά κάθε x_0 ὑπάρχει συχνότητα ω^* όπου παρουσιάζει Κ-ὑπαρμονική.

Τά δύο φράγματα τ_1 καί τ_2, μάς βοηθούν νά βρούμε όρια τής ω^*. Άν κοιτάξουμε τό σχήμα τής ἑπομένης σελίδος, τά $\tau_1(x_0)$, $\tau_2(x_0)$ είναι δύο εύθείες παράλληλεςπρός τόν άξονα x. Ή τομή τους μέ τήν ὑπερβολή μάς δίνει τά ζητούμενα όρια.



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.13

'Από τό σχήμα έχουμε $\omega_1 < \omega^* < \omega_2$
άλλά $\omega_i = \frac{\kappa\pi}{T_i(x_0)}$ $i = 1,2$
δηλαδή τελικά:

$$\frac{\kappa\pi}{T_1(x_0)} < \omega^* < \frac{\kappa\pi}{T_2(x_0)}$$

'Αν τώρα ορίσουμε σάν <u>συχνότητα συστήματος</u>:

$$\tilde{\omega}^* = \frac{\omega^*}{\kappa}$$

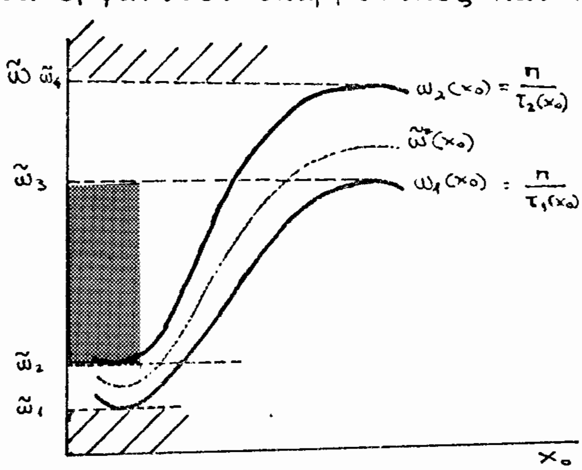
θά είναι:

$$\frac{\pi}{T_1(x_0)} < \tilde{\omega}^* < \frac{\pi}{T_2(x_0)}$$

'Η συχνότητα συστήματος είναι ή συχνότητα μέ τήν όποία ταλαντώνεται τό σύστημα. Έκμεταλευόμαστε τό ότι τά όρια της είναι άνεξάρτητα τού κ, τής τάξεως τής ύπαρμονικής.

Ούσιαστικά τό θέμα έχει τελειώσει γιατί μέχρι έδώ έχει άποδειχθεί ή ύπαρξη τών ύπαρμονικών. 'Επειδή όμως τυχαίνει νά είμαστε μηχανικοί θά είναι καλύτερα νά μπορούμε νά άπαντάμε στό πρόβλημα όπως έμφανίζεται στήν πράξη.

Στή φύση έχουμε τό σύστημα, τού έπιβάλλουμε μιά είσοδο συγκεκριμένης συχνότητος ω καί ρωτάμαι "μπορεί στήν συχνότητα αύτή νά έμφανίσει ύπαρμονικές καί ποιές;"



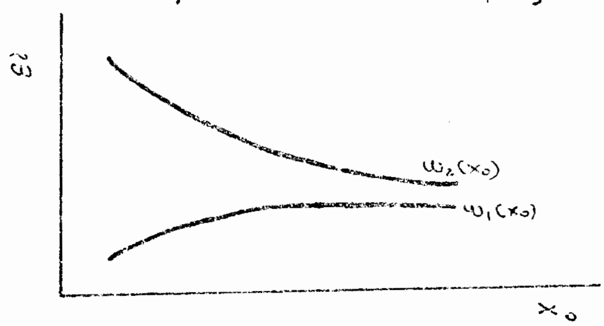
ΣΧΗΜΑ ΙΙ.14

Στήν άπάντηση τού προβλήματος έτσι όπως ρωτήθηκε θά μάς βοηθήσουν τά όρια τής συχνότητος $\tilde{\omega}^*$. Σχεδιάζουμε τά δύο αύτά όρια συναρτήσει τού x_0. Έστω ότι δίνουν ένα σχήμα σάν αύτό τού σχήματος ΙΙ.14. 'Οπως θά δούμε, τό σχήμα αύτό είναι τό καλλύτερο πού μπορεί νά παρουσιαστεί. 'Οποια μορφή καί νά έχει ή συνάρτηση $\tilde{\omega}^*(x_0)$ θά περιέχει σίγουρα τίς συχνότητες μεταξύ $(\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_3)$ καί δέν θά περιέχει αύτές πού είναι στήν γραμμοσκιασμένη περιοχή, $(0,\tilde{\omega}_1)\cup(\omega_4,\infty)$. 'Υπάρχουν τέλος καί οί <u>περιοχές άβεβαιότητος</u> $(\tilde{\omega}_1,\tilde{\omega}_2)$, $(\tilde{\omega}_3,\tilde{\omega}_4)$ γιά τίς όποίες δέν ξέρουμε τίποτα. 'Οσο καλύτερες είναι οί συναρτήσεις m καί M, δηλαδή όσο πιό κοντά στήν $g(x,y,t)$ είναι, τόσο οί περιοχές άβεβαιότητος είναι μικρότερες.

'Οταν έπομένως δίδεται ή συχνότητα εισόδου ω, τότε τό σύστημα μπορεί νά ταλαντωθεί μέ έκείνα τά ύποπολλαπλάσιά της (ύπαρμο-

νικές),πού θά πέσουν μέσα στήν περιοχή συχνοτήτων $(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$ (τελείες).
Έκείνα τά ύποπολλαπλάσια πού πέφτουν στίς περιοχές άβεβαιότητος δέν ξέρουμε άν έμφανίζονται
καί τέλος αύτά πού πέφτουν στή γραμμοσκιασμένη περιοχή δέν έμφανίζονται.

Τό σχήμα όμως αύτό είναι τό ίδανικότερο πού μπορεί νά έμφανιστεί ,είναι δυνατόν όμως νά έμφανιστεί καί σχήμα σάν αύτό τού ΙΙ.15 όπου δέν πέρνομε καμιά πληροφορία όσον άφορά τήν συχνότητα.



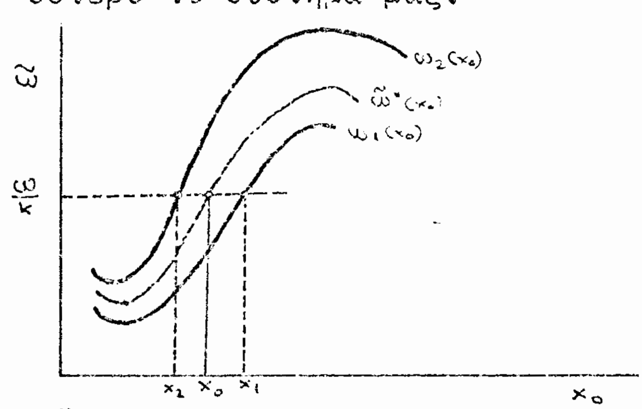
ΣΧΗΜΑ ΙΙ.15

Γιά νά μπορέσει νά ύπάρξει γνωστή περιοχή συχνοτήτων θά πρέπει νά συμβαίνει:

$$\max \omega_1(x_0) > \min \omega_2(x_0)$$

ΠΛΑΤΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΣ

Ένα μέγεθος πού είναι σημαντικό σέ μιά ταλάντωση είναι καί τό πλάτος της,γιατί στίς άκραίες συνήθως θέσεις καταπονείται περισσότερο τό σύστημά μας.

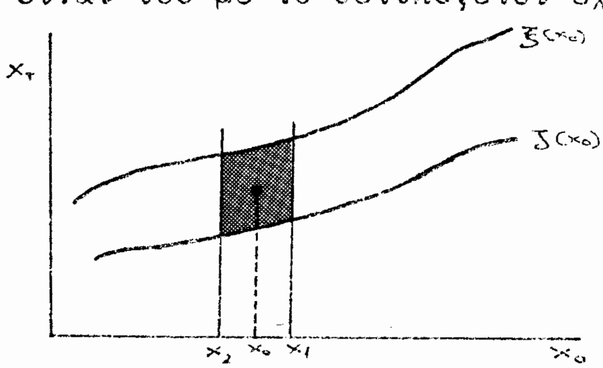


ΣΧΗΜΑ ΙΙ.16

Τό σχήμα ΙΙ.16 είναι τό ίδιο τό σχήμα ΙΙ.14,θά τό χρησιμοποιήσουμε γιά νά βρούμε όρια τού πλάτους.

Τό θετικό πλάτος είναι τό x_0. τά όριά του είναι όπως βλέπουμε στό σχήμα,τά x_2, x_1 .

Στήν περίπτωση τής περιττής συμμετρίας τό άρνητικό πλάτος είναι ίσο μέ τό θετικό,έτσι έχει τά ίδια όρια.



ΣΧΗΜΑ ΙΙ.17

Στήν περίπτωση τής άρτιας συμμετρίας τό άρνητικό πλάτος βρίσκεται μεταξύ τών τιμών $\xi(x_0)$ καί $\zeta(x_0)$ (βλέπε σχήμα ΙΙ.16.)

Σχεδιάζουμε τίς δύο συναρτήσεις όπως στό σχήμα ΙΙ.17 , τό άρνητικό πλάτος είναι μέσα στήν γραμμοσκιασμένη περιοχή,μπορούμε έπομένως νά βρούμε όριά του.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ

Τό βασικώτερο σχήμα στό πρόβλημα τών ύπαρμονικών είναι τό σχήμα II.16. Από αύτό βρίσκουμε ποιές ύπαρμονικές, γιά μιά δεδομένη συχνότητα είσόδου, έμφανίζονται καί φράγματα τού πλάτους τής ταλαντώσεως.

Γιά νά μπορέσουμε νά κατασκευάσουμε τό σχήμα αύτό, θά πρέπει νά μπορούμε νά ύπολογίσουμε τά φράγματα $\tau_1(x_0)$, $\tau_2(x_0)$. Αύτά ύπολογίζονται άπό όλοκληρώματα τής μορφής $\int_{x_0}^{0} \frac{dx}{y}$.

Ένα όλοκλήρωμα όμως δέν βρίσκεται πάντοτε άναλυτικά. Επειδή τά τ_1, τ_2 δέν είναι παρά φράγματα, μπορούμε νά χαλαρώσουμε τά φράγματά μας κατά τόν σωστό τρόπο, άντικαθιστόντας τήν $y(x)$ κατάλληλα, καί τό όλοκλήρωμα πού θά προκύψει νά βρίσκεται εύκολα.

Τήν εύκολία αύτή θά τήν πληρώσουμε μέ πληροφορίες τίς όποίθά χάσουμε.

Ό άριθμητικός ύπολογισμός τού όλοκληρώματος δέν είναι πάλι εύκολος έπειδή τά όλοκληρώματα αύτά είναι γενικευμένα γιατί δέν ορίζεται τό $\frac{1}{y}$ στό x_0 έπειδή $y(x_0)=0$ όπότε $\frac{1}{y(x_0)}=\infty$

θά πρέπει νά μετασχηματίσουμε κατάλληλα τό όλοκλήρωμα ώστε νά μπορέσουμε νά χρησιμοποιήσουμε μιά κοινή μέθοδο όλοκληρώσεως όπως είναι ή Simpson.

Τό y έμφανίζεται πολύ συχνά ύπό τήν μορφή:

$$y(x) = (x_0-x)^{k}\cdot A(x)$$

όπου $1>k>0$

καί γιά τήν $A(x)$ ότι $A(x_0)\neq 0$ καί ύπάρχει τό $A'(x)$.

τότε παρατηρούμε τούς μετασχηματισμούς:

$$\int_a^{x_0}\frac{dx}{(x_0-x)^k\cdot A(x)} = \frac{1}{k-1}\int_a^{x_0}\frac{\left[(x_0-x)^{1-k}\right]'\cdot dx}{A(x)} =$$

$$\frac{1}{k-1}\cdot\frac{(x_0-x)^{1-k}}{A(x)}\Bigg]_a^{x_0} + \frac{1}{k-1}\int_a^{x_0}(x_0-x)^{1-k}\cdot\frac{A'(x)}{A^2(x)}\,dx =$$

$$\boxed{\frac{1}{1-k}\cdot\frac{(x_0-a)^{1-k}}{A(a)} - \frac{1}{1-k}\cdot\int_a^{x_0}(x_0-x)^{1-k}\cdot\frac{A'(x)}{A^2(x)}\,dx}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό ὁλοκλήρωμα στό ὁποῖο καταλήξαμε δέν εἶναι πιά γενικευμένο ἀφοῦ ὁρίζεται μέ πεπερασμένη τιμή στό σημεῖο x_o. Μπορεῖ νά ὁλοκληρωθεῖ ἑπομένως ἀριθμητικά.

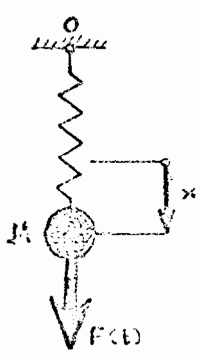
Στό ἑπόμενο κεφάλαιο τῶν ἐφαρμογῶν ἀναφέρουμε τόν ταλαντωτή τοῦ Duffing. Ἐκεῖ θά συναντήσουμε ἕνα τέτοιο ὁλοκλήρωμα πού δέν βρίσκεται ἀναλυτικά.
Θά ἐφαρμόσουμε τίς δύο μεθόδους πού ἀναφέραμε καί θά συγκρίνουμε τά ἀποτελέσματα.

IIβ.

Παραδείγματα

Θά άναφέρουμε τώρα δύο παραδείγματα τά όποία θά τά τά λύσουμε λεπτομερώς καί στό τέλος θά κάνουμε μιά βασική παρατήρηση γιά τήν μέθοδό μας.

<u>ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΕΛΑΤΗΡΙΟ</u> (έξίσωση τοῦ Duffing).



ΣΧΗΜΑ II.18

Στό σχῆμα II.18 βλέπουμε τό φυσικό φαινόμενο πού θά περιγράψουμε. Ένα σῶμα μάζης M, κρεμασμένο σέ ένα έλατήριο, πού είναι στερεωμένο σέ ένα σταθερό σημείο O.
Ή μή γραμμικότητα, έμφανίζεται άπό τήν στιγμή πού θά θεωρήσουμε ότι ή δύναμη πού άσκεί τό έλατήριο στό σῶμα δέν είναι σέ γραμμική σχέση μέ τήν άπομάκρινση x .

Έτσι άν έφαρμόσουμε δυναμική στό σύστημα καταλήγουμε στήν έξίσωση:

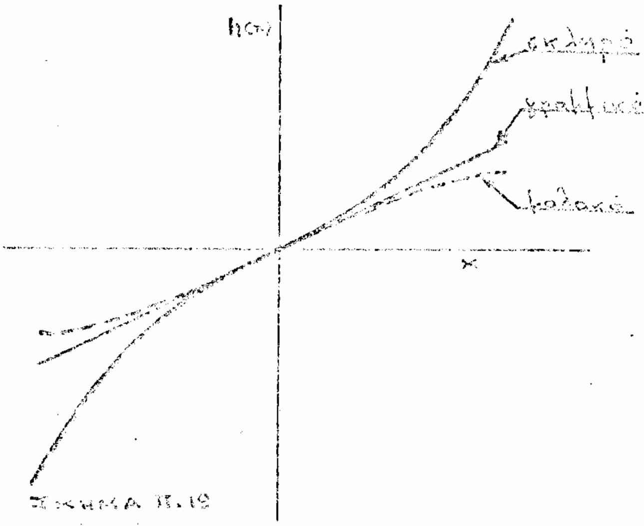
$$M\ddot{x} = F(t) + Mg - h(x) \rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{M}h(x) = \frac{1}{M}F(t) + g$$

όπου $h(x)$ ή έξίσωση τοῦ έλατηρίου καί g ή έπιτάχυνση τῆς βαρύτητος. Ή $F(t)$ είναι ή έπιβαλλομένη δύναμη πού στήν περίπτωσή μας είναι περιοδική.

Τώρα ύπάρχει τό πρόβλημα τῆς έκλογῆς τῆς συναρτήσεως $h(x)$. Μπορούμε νά πάρουμε τούς πρώτους όρους τῆς σειράς Tailor . Άν όμως θελήσουμε νά παρουσιάζει ὁρισμένα χαρακτηριστικά τό έλατήριο, τότε πρέπει ή έκλογή μας νά γίνει προσεκτικά. Μιά λογική ίδιότητα είναι, γιά έπιμήκηνση ή συμπίεση ίδια, ή δύναμη νά είναι ίδια. Γιά νά ίκανοποιείται κάτι τέτοιο θά πρέπει στή σειρά Tailor νά μήν ύπάρχουν άρτιες δυνάμεις. Καταλήγουμε έπομένως στόν τύπο :

$$h(x) = kx + ax^3$$

άν θεωρήσουμε ότι $\kappa > 0$,τότε άνάλογα μέ τό πρόσημο τού α διακρίνουμε τά έλατήρια σέ:



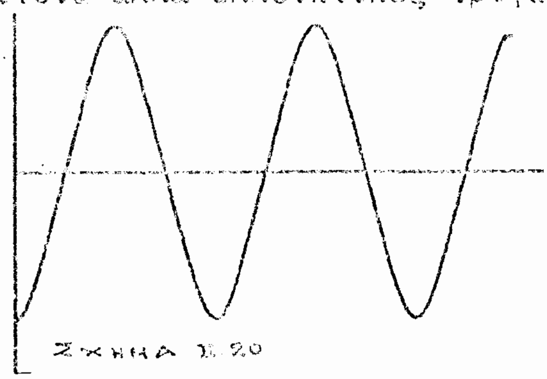
ΣΧΗΜΑ II.19

$\alpha<0$,μαλακά,ή δύναμη μικρότερη άπό τήν τού γραμμικού έλατηρίου.
$\alpha>0$,σκληρά,ή δύναμη μεγαλήτερη άπό τήν τούγραμμικού έλατηρίου. Στό σχήμα II.19 βλέπουμε τά δύο είδη καί τό γραμμικό.

Μετά άπό όλα αύτά καταλήγουμε στήν γνωστή έξίσωση τού Duffing.

$$\ddot{x} + \kappa x + \alpha x^3 = F(t)$$

Στήν περίπτωση πού ή είσοδός μας ήταν μηδέν καί τό έλατήριο γραμμικό τό σύστημα είναι ένας ταλαντωτής.Τήν ίδιότητα αύτή τήν διατηρεί καί στήν μή γραμμική περίπτωση.Οί ταλαντώσεις τώρα δέν είναι άπλά ήμίτονα άλλά έλλειπτικές τριγωνομετρικές ταλαντώσεις.


ΣΧΗΜΑ II.20

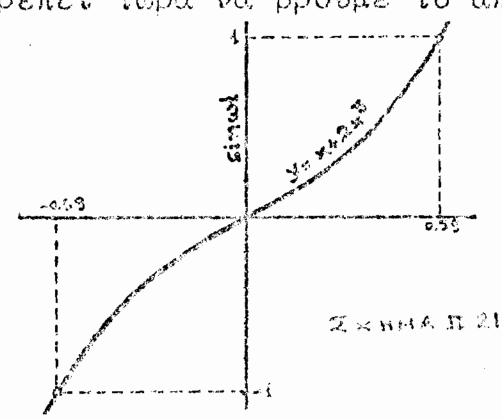
Μιά τέτοια ταλάντωση φαίνεται στό σχήμα II.20.
Ή έξίσωση αύτή είναι κλασσική στά μή γραμμικά καί έχουνγραφτεί πολλές έργασίες,μιά πολύ καλή είναι ή [4].

Έμείς θά έξετάσουμε τώρα τήν ειδική περίπτωση πού $\kappa=1$, $\alpha=2$ $F(t)=\sin\omega t$.Τό έλατήριό μας είναι σκληρό.
Ύπό μορφή συστήματος έχουμε:

$$\dot{y} + x + 2x^3 - \sin\omega t = 0$$
$$\dot{x} = y$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε περιττή συμμετρία.

Θά πρέπει τώρα νά βρούμε τό άπαγορευμένο διάστημα.Στό σχήμα II.21 βλέπουμε ότι τό διάστημα αύτό είναι τό (-0.59, 059) ,(τό διάστημα ύπολογίζεται άπό τήν έξίσωση: $x+2x^3 = \pm 1$).



ΣΧΗΜΑ II.21

Άν τό x_0 δέν είναι μέσα στό διάστημα αύτό τότε ή λύση μας είναι συνεχής ώς πρός ω .

Σάν δεύτερο βήμα θά ύπολογίσουμε τίς συναρτήσεις $M(x,y)$, $N(x,y)$

Παρατηρούμε:

$$x+2x^3-1 < x+2x^3-\eta\sigma\omega t < x+2x^3+1$$

Ἀπό αὐτές τώρα θά βροῦμε τίς τροχιές T_M , T_m ,λύνοντας τίς διαφορικές :

$$y\frac{dy}{dx}+x+2x^3-1\ (\eta+1)=0$$

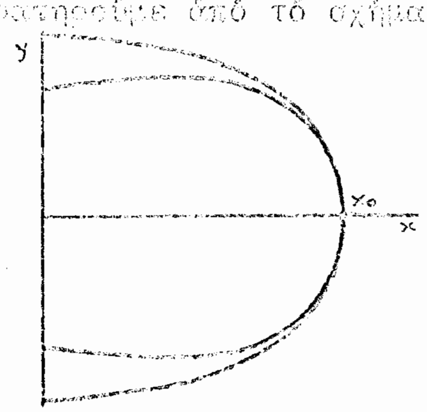
$$y(x_0)=0$$

οἱ ὁποῖες ὁλοκληρώνονται πολύ εὔκολα καί μας δίνουν:

$T_M.\quad y_M^2+x^2+x^4-2x=x_0^2+x_0^4-2x_0$

$T_m\quad y_m^2+x^2+x^4+2x=x_0^2+x_0^4+2x_0$

Παρατηροῦμε ἀπό τό σχῆμα II.22 ,ὅτι οἱ τροχιές εἶναι συμμετρικές ὡς πρός τόν x . Ἡ συμμετρία αὐτή διευκολύνει τόν ὑπολογισμό τῶν φραγμάτων,τοῦ χρόνου τομῆς.



ΣΧΗΜΑ II.22

Ἄν θυμηθοῦμε τούς τύπους πού μᾶς δίνουν τά φράγματα,εἶναι:

$$\tau_1(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{dx}{y'}+\int_{x_0}^{0}\frac{dx}{y}$$

καί λόγω τῆς συμμετρίας,τά δύο ὁλοκληρώματα εἶναι ἴσα.Τελικά ἔχουμε:

$$\tau_1(x_0)=2\cdot\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x_0^4-x^4+x_0^2-x^2-2(x_0-x)}}\quad;\quad \tau_2(x_0)=2\cdot\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{x_0^4-x^4+x_0^2-x^2+2(x_0-x)}}$$

Τά δύο αὐτά ὁλοκληρώματα δέν ὑπολογίζονται μέ στοιχειώδη τρόπο,εἶναι τά λεγόμενα ἐλλειπτικά,καταλήγουν δηλαδή στίς ἐλλειπτικές συναρτήσεις.Ἐδῶ μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τήν θεωρία πού εἴπαμε στό τέλος τοῦ προηγουμένου κεφαλαίου.

Ἀφοῦ τά $\tau_1(x_0)$, $\tau_2(x_0)$δέν εἶναι παρά φράγματα μποροῦμε νά βροῦμε ἕνα φράγμα μεγαλύτερο τοῦ $\tau_1(x_0)$ ἀντικαθιστώντας τήν $y_M(x)$ μέ μιά συνάρτηση μικρότερη καί ἀντίστοιχα τήν $y_m(x)$ μέ μιά συνάρτηση μεγαλύτερη γιά νά βροῦμε φράγμα μικρότερο τοῦ $\tau_2(x_0)$.

Παρατηροῦμε ὅτι:

$$y_m=(x_0-x)^{1/2}\cdot\left[x_0^3+x_0^2x+x_0x^2+x^3+x_0+x+2\right]^{1/2}$$

ἄν μέσα στήν ἀγκύλη βάλουμε ὅπου x τό x_0 θά προκύψη ποσότητα μεγαλύτερη τοῦ y_m .Δηλαδή

$$y_m<(x_0-x)^{1/2}\cdot\left[3x_0^3+2x_0+2\right]^{1/2}$$

Μέ ὅμοιο τρόπο βρίσκουμε ἄν ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τήν μικρότερη τιμή του (τό μηδέν) ὅτι:

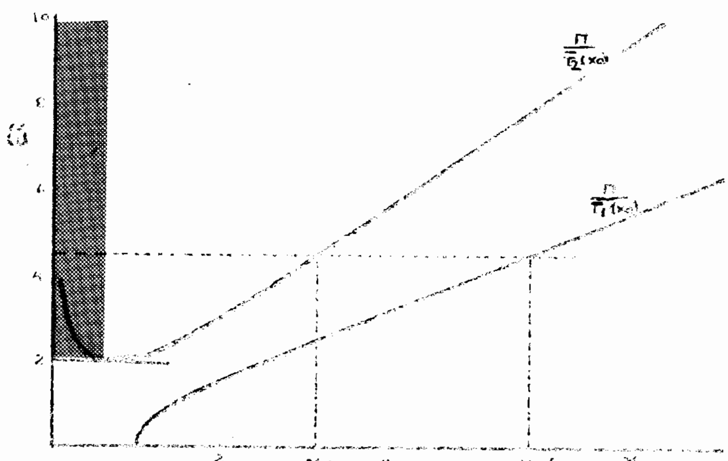
$$y_{1k} > (x_0-x)^{1/2}\left[x_0^3+x_0-2\right]^{1/2}$$

καταλήγουμε τότε στά έξεις όλοκληρώματα:

$$\tilde{\tau}_1(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{(x_0-x)\cdot\left[x_0^3+x_0-2\right]}}\qquad\qquad \tilde{\tau}_2(x_0)=\int_0^{x_0}\frac{dx}{\sqrt{(x_0-x)\left[3x_0^3+2x_0+2\right]}}$$

τά όποία είναι πολύ εύκολο νά βρεθούν:

$$\tilde{\tau}_1(x_0)=\frac{4\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0^3+x_0-2}}\qquad\qquad \tilde{\tau}_2(x_0)=\frac{4\sqrt{x_0}}{\sqrt{3x_0^3+2x_0+2}}$$



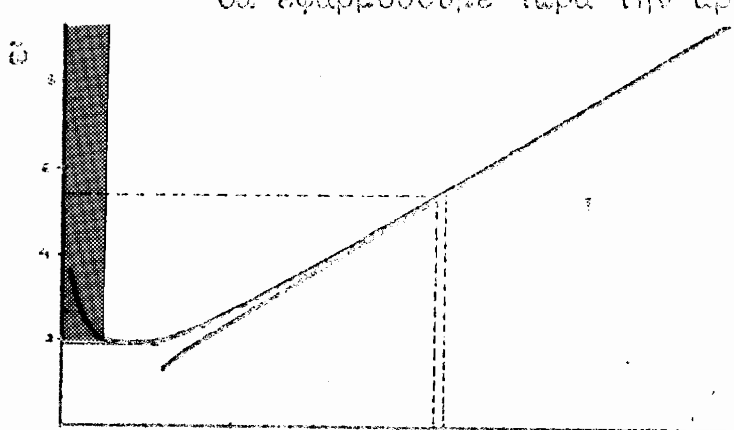
Σχημα II.23

'Αφού βρήκαμε τά $\tilde{\tau}_1(x_0)$, $\tilde{\tau}_2(x_0)$, μπορούμε νά βρούμε καί τά φράγματα τής συχνότητος συστήματος:

$$\frac{\Pi}{\tilde{\tau}_1(x_0)} < \tilde{\omega} < \frac{\Pi}{\tilde{\tau}_2(x_0)}$$

Τά βλέπουμε σχεδιασμένα στό σχήμα II.23 .Παρατηρούμε ότι γιά συχνότητα μεγαλύτερη τής $\tilde{\omega}=2$ είμαστε σίγουροι ότι έμφανίζεται ύπαρμονική.

Θά έφαρμόσουμε τώρα τήν άριθμητική μέθοδο γιά νά βρούμε τά $\tau_1(x_0)$, $\tau_2(x_0)$.Παρατηρούμε ότι :



Σχημα II.24

$$y=(x_0-x)^{1/2}\left[x_0^3+x_0^2x+x_0x^2+x_0+x\pm 2\right]^{1/2}\ \text{όπότε}$$

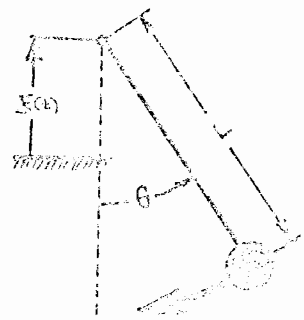
$$A(x)=\left[x_0^3+x_0^2x+x_0x^2+x_0+x\pm 2\right]^{1/2}$$

καί παρατηρούμε ότι ύπάρχει τό $A(x_0)$ καθώς καί $A'(x)$. Δηλαδή έφαρμόζεται ή μέθοδός μας.

Στό σχήμα II.24 βλέπουμε τό άποτέλεσμα τής άριθμητικής όλοκληρώσεως.Γιά συχνότητες συστήματος μεγαλύτερες τής $\tilde{\omega}=1.88$ έμφανίζεται ύπαρμονική. Ή πληροφορία αύτή είναι έλάχιστα καλύτερη άπό αύτήν πού μάς δίνει ή άλλη μέθοδος. Ή πληροφορία όμως πού πέρνουμε όσον άφορά τό πλάτος τής ταλαντώσεως είναι άσύγκριτα πιό καλή,άφού γιά μεγάλα $\tilde{\omega}$ μάς δίνει άκριβώς τό πλάτος,άντίθετα μέ τήν άλλη μέθοδο πού τά όρια τού πλάτους μεγαλώνουν.

Τό παραπάνω άποτέλεσμα έπρεπε νά τό περιμένουμε άφού ή άριθμητική μέθοδος είναι πιό κοντά στό φυσικό μας σύστημα.

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΗ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ ΕΚΚΡΕΜΟΥΣ



Σχήμα ΙΙ.25

Στό σχήμα ΙΙ.25 βλέπουμε τό φυσικό σύστημα μέ τό όποῖο θά ἀσχοληθοῦμε. Εἶναι τό γνωστό μας ἐκκρεμές, μόνο πού τώρα οἱ γωνίες θ δέν εἶναι μικρές, ὥστε τό πρόβλημα νά γραμμικοποιεῖται καί ἐπίσης τό σημεῖο στηρίξεως δέν εἶναι σταθερό ἀλλά ὑποβάλεται σέ ταλάντωση $\xi(t)$.

Τό πρόβλημα αὐτό εἶναι πάλι, ἀπό τά ἀγαπημένα τῶν μή γραμμικῶν, ὅπως καί τοῦ ἐλατηρίου καί ἔχουν γραφτεῖ πολλές ἐργασίες, στή βιβλιογραφία ἀναφέρονται μερικές.

Δυναμική στό σύστημα, μᾶς δίνει τήν ἐξίσωση:

$$\ddot{\theta} + \left(\omega_0^2 + \ddot{\xi} \cdot \frac{1}{L}\right) \cdot \sin\theta = 0$$

ὅπου $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$.

Θά ἀσχοληθοῦμε στήν περίπτωσή μας μέ τίς τιμές:

$$\omega_0 = 2 \qquad \frac{\ddot{\xi}}{L} = -\cos\omega t$$

ὁπότε καταλήγουμε στό σύστημα:

$$\dot{u} + (4 - \cos\omega t) \cdot \sin\theta = 0$$

$$\dot{\theta} = u$$

Τό σύστημα ἐμφανίζει περιττή συμμετρία ἐπειδή

$$\big(4 - \cos(-\omega t)\big) \cdot \sin(-\theta) = -(4 - \cos\omega t) \cdot \sin\theta$$

Τό ἀπαγορευμένο διάστημα θά δοθεῖ ἀπό τήν σχέση:

$(4 - \cos\omega t) \cdot \sin\theta = 0$ πού ἱκανοποιεῖται μόνο στά σημεῖα $\theta = k\pi$

Ἐπειδή ἐνδιαφερόμαστε γιά ταλαντώσεις τῆς θ, σημαίνει ὅτι οἱ τιμές της θά βρίσκονται στό διάστημα $(-\pi, \pi)$. Διαφορετικά τό ἐκκρεμές θά κάνει ὁλόκληρες περιφορές, φαινόμενο πού δέν μᾶς ἀπασχολεῖ ἐδῶ.

Στό παράδειγμα αὐτό θά δοῦμε πόσο πολύ σημασία παίζει ἡ σωστή ἐκλογή τῶν συναρτήσεων φραγῆς στή λήψη ἀποτελεσμάτων.

Θέλουμε νά φράξουμε τήν συνάρτηση $(4 - \cos\omega t) \cdot \sin\theta$
Ἐπειδή πρόκειται γιά περιττή περίπτωση, τό θ μᾶς ἐνδιαφέρει στό διάστημα $(0, \pi)$ ὅπου τό $\sin\theta$ εἶναι θετικό. Λόγω τῆς τελευταίας ἰδιότητος τοῦ $\sin\theta$ βρίσκουμε τά ἑξεῖς φράγματα:

$$3\sin\theta < (4-\cos\omega t)\cdot\sin\theta < 5\cdot\sin\theta \quad (1)$$

θά μπορούσε όμως νά προχωρήση κανείς διαφορετικά άν δέν προσέξει τήν ιδιότητα αύτή τού $\sin\theta$:

$$4\sin\theta - 1 < 4\sin\theta - \cos\omega t\cdot\sin\theta < 4\cdot\sin\theta + 1 \quad (2)$$

Οί τροχιές γιά τίς δύο περιπτώσεις είναι

(1) T_M $\quad u^2 = 6\cdot(\cos\theta - \cos\theta_0)$

T_m $\quad u^2 = 10\cdot(\cos\theta - \cos\theta_0)$

(2) T_M $\quad u^2 = 8(\cos\theta - \cos\theta_0) - 2(\theta_0 - \theta)$

T_m $\quad u^2 = 8(\cos\theta - \cos\theta_0) + 2(\theta_0 - \theta)$

τύποι πού βρίσκονται μέ στοιχειώδεις όλοκληρώσεις.

Τά φράγματα τού χρόνου τομής δίδονται άπό τούς τύπους:

(1) $\tau_1(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{6(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$ $\qquad \tau_2(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{10\cdot(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$

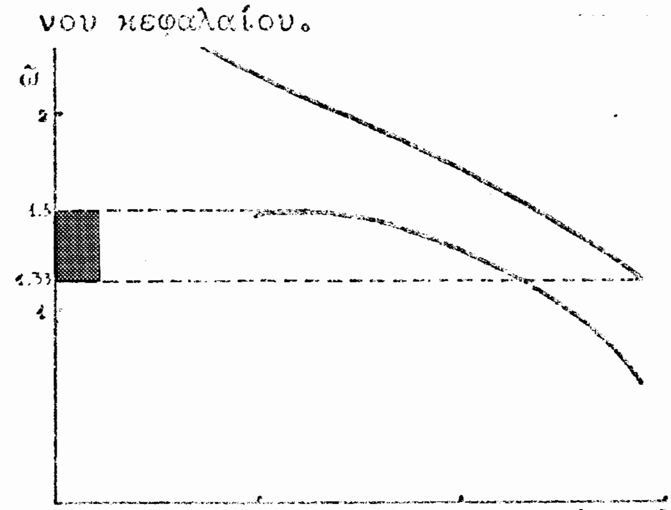
(2) $\tau_1(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{8(\cos\theta - \cos\theta_0) - 2(\theta_0 - \theta)}}$ $\qquad \tau_2(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{8(\cos\theta - \cos\theta_0) + 2(\theta_0 - \theta)}}$

Τά όλοκληρώματα αύτά δέν βρίσκονται μέ στοιχειώδη τρόπο, θά προσπαθήσουμε νά έφαρμόσουμε τήν άριθμητική μέθοδο άφού μάς δίνει καλύτερα άποτελέσματα.

Παρατηρούμε:

(1) $u = (\theta_0 - \theta)^{1/2}\cdot\left[\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{\theta_0 - \theta}\right]^{1/2}\cdot\sqrt{6}\,(\text{ή } \sqrt{10})$ $\qquad$ (2) $u = (\theta_0 - \theta)^{1/2}\cdot\left[8\cdot\frac{\cos\theta - \cos\theta_0}{\theta_0 - \theta} \pm 2\right]^{1/2}$

Δηλαδή έρχονται στήν μορφή πού περιγράφαμε στό τέλος τού προηγουμένου κεφαλαίου.



Σχημα ΙΙ.26

Στό σχήμα ΙΙ.26 βλέπουμε τά άποτελέσματα τής περιπτώσεως (2) .

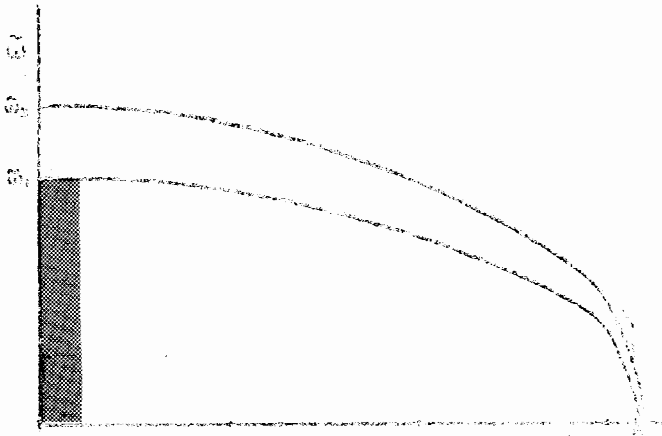
Παρατηρούμε ότι μόνο γιά τό διάστημα (1.33 , 1.5) μπορούμε νά πούμε ότι ύπάρχει ύπαρμονική. Στά ύπόλοιπα διαστήματα δέν ξέρουμε τίποτα έπειδή τά όλοκληρώματα δέν μπορούν νά ύπολογιστούν γιά τιμές τού θ_0 έξω άπό τό διάστημα (0.512 , 2.838) .

Τό άντίστοιχο σχήμα γιά τήν περίπτωση (1) είναι τής έπομένης σελίδος, σχήμα ΙΙ.27. Χωρίς άμφιβολία τό σχήμα αύτό είναι πολύ πιό καλό άπό τό ΙΙ.26 .

Τό όλοκλήρωμα πού μάς άπασχολεί στήν περίπτωση (1) είναι τό

$$I(\theta_0) = \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

καί $\tau_1(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{6}} I(\theta_0)$, $\tau_2(\theta_0) = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot I(\theta_0)$.



Σχημα Π.27

Όπως φαίνεται στό σχήμα γιά $\theta_0 = 0$ έχουμε πεπερασμένη τιμή τού $I(\theta_0)$. Αύτό άπό πρώτη ματιά φαίνεται περίεργο, άφού τό πάνω καί κάτω όριο τού όλοκληρώματος είναι μηδέν. Ή συνάρτηση όμως πού είναι στό όλοκλήρωμα, γιά $\theta_0 = 0$ γίνεται ∞ . Μοιάζει δηλαδή ή περίπτωση, μέ όλοκλήρωση κρουστικής συναρτήσεως.

Μπορούμε τό όριο αύτό νά τό βρούμε άναλυτικά γιά νά είμαστε σίγουροι γιά τά ψηφιακά άποτελέσματα. Γιά θ_0 κοντά στό μηδέν τά $\cos\theta$ γράφονται: $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ $\cos\theta_0 \simeq 1 - \frac{\theta_0^2}{2}$

όπότε $\cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{1}{2}(\theta_0^2 - \theta^2)$

καί τό όλοκλήρωμα γίνεται:

$$I(\theta_0) = \sqrt{2} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}}$$

πού ύπολογίζεται στοιχειωδώς καί έχει τιμή $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Τήν τιμή αύτή τήν έχει καί γιά $\theta_0 \to 0$.

Τά δύο όρια έπομένως τού σχήματος Π.27 είναι $\tilde{\omega}_1 = \sqrt{3}$, $\tilde{\omega}_2 = \sqrt{5}$

Τό διάστημα τού θ_0 είναι τό $(0, \eta)$. Παρατηρούμε στό σχήμα μιά άτέλεια στό σημείο η . Γιά $\theta_0 = \eta$ μπορούμε πάλι νά ύπολογήσουμε τό όλοκλήρωμα $I(\theta_0)$ μέ στοιχειώδη τρόπο, δίχως προσεγγίσεις όπως στό μηδέν.
Τό άποτέλεσμα είναι $I(\eta) = +\infty$, πού σημαίνει ότι τά φράγματα τής συχνότητος είναι καί τά δύο μηδέν. Οί δύο καμπύλες έπομένως τέμνουν τόν άξονα x στό σημείο η .

Βάσει τής τελευταίας παρατηρήσεως βγάζουμε τά έξείς συμπεράσματα:
Περιοχή ύπαρμονικών τό διάστημα (0 , $\sqrt{3}$) .
Περιοχή άβεβαιότητος τό διάστημα ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$) .
Περιοχή όπου δέν έμφανίζονται ύπαρμονικές τό διάστημα ($\sqrt{5}$, ∞) .

Βλέπουμε πόσο μεγάλη σημασία έχει ή σωστή έκλογή τών συναρτήσεων φραγής καί πόσο καλύτερα άποτελέσματα μάς έδωσε ή περίπτωση ① άπό τήν ② . Τό βασικό χαρακτηριστικό τής ① είναι ότι βρίσκεται πιό κοντά στήν πραγματική μας συνάρτηση , είναι δηλαδή στενότερο φράγμα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ .

Καί στά δύο παραδείγματα τίς συναρτήσεις φραγής τίς βρήκαμε αντικαθιστώντας τήν είσοδο μέ τήν μέγιστη καί τήν ελάχιστη τιμή της.

Από έκεί καί κάτω δέν χρησιμοποιήθηκε καθόλου ή είσοδος. Όλα τά άποτελέσματα δηλαδή στηρίζονται στά άκρότατα τής είσόδου καί όχι στή μορφή τής.

Η παρατήρηση αύτή είναι πολύ βασική γιατί,θά πάρνομε τά ίδια άποτελέσματα,άν άντί γιά αύτές τίς είσόδους,είχαμε όποιεσδήποτε άλλες,μέ τά ίδια άκρότατα,(άλλά μέ τήν ίδια συμμετρία ώς πρός τήν άρχή τών χρόνων).

III. ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ

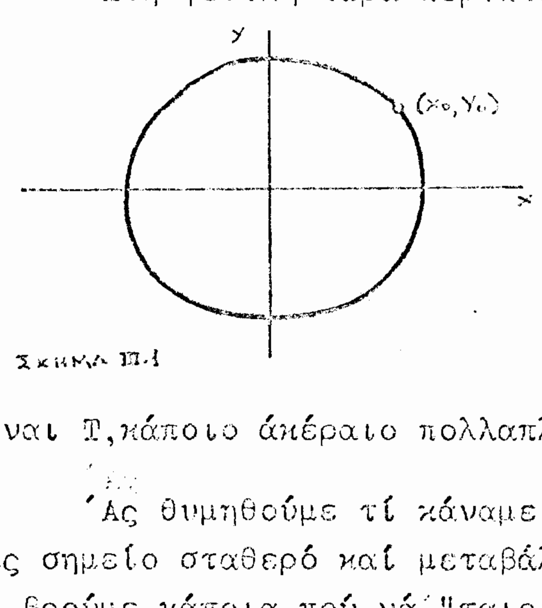
Στό κεφάλαιο αὐτό θά προσπαθήσουμε νά ἐφαρμόσουμε τήν μέθοδο, στήν περίπτωση δίχως συμμετρίες, θά δοῦμε τί δυνατότητες ἔχει. Κατόπιν θά ἀναφερθοῦμε σέ συστήματα μέ μικρές διαταραχές καί σέ ὑπαρμονικές μεγάλης τάξεως.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Β΄ ΤΑΞΕΩΣ ΔΙΧΩΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Τά συστήματα πού μελετήσαμε μέχρι τώρα, εἴδαμε ὅτι εἶχαν συμμετρίες.

Ἡ συμμετρία μάς ἐξασφάλιζετό ἑξῆς, ἄν ἱκανοποιόταν ἡ μία ἀπό τίς δύο συνθῆκες πού ἀπαιτοῦνται γιά ὑπαρμονική ταλάντωση, τότε ἴσχυε αὐτόματα καί ἡ δεύτερη. Δηλαδή οὐσιαστικά ἀντί δύο συνθῆκες εἴχαμε μία.

Στή γενική τώρα περίπτωση πρέπει νά ἰσχύουν καί οἱ δύο συνθῆκες, τίς ἀναφέρουμε πάλι:



Σχημα ΙΙΙ.1

Υ1. Ἄν τό σύστημά μας ξεκινήσει ἀπό τό σημεῖο (x_0, y_0) θά πρέπει νά κλείσει πάλι στό ἴδιο σημεῖο.

Υ2. Ὁ χρόνος πού θά κάνει γιά νά κλείσει, θά πρέπει νά εἶναι Τ, κάποιο ἀκέραιο πολλαπλάσιο τῆς περιόδου τῆς εἰσόδου.

Ἄς θυμηθοῦμε τί κάναμε μέχρι τώρα. Διατηρούσαμε τό ἀρχικό μας σημεῖο σταθερό καί μεταβάλλαμε τήν συχνότητα εἰσόδου, μέχρι νά βροῦμε κάποια πού νά "ταιριάζει", τήν ἴδια διαδικασία θά ἀκολουθήσουμε καί τώρα.

Ὑπάρχει τώρα τό πρόβλημα ποιά σημεῖα εἶναι κατάλληλα γιά ἀρχικά. Ὅταν ἡ λύση μας εἶναι περιοδική τά $x(t)$ καί $y(t)$ εἶναι περιοδικές συναρτήσεις τοῦ χρόνου, ἐπειδή ὅμως ἔχουμε ὁρίσει $\dot{x}=y$ δηλαδή ἡ $y(t)$ εἶναι ἡ παράγωγος τοῦ $x(t)$, ἡ $y(t)$ θά ἔχει μέση τιμή μηδέν. Γιά νά συμβαίνει κάτι τέτοιο ἀναγκαία συνθήκη εἶναι νά πέρνει θετικές καί άρνητικές τιμές.Λόγω συνεχείας θά πέρνει καί τήν τιμή μηδέν.

Ξέρουμε έπομένως ότι ή περιοδική λύση μας θά διέρχεται άπό σημεία πού έχουν $y=0$,σημεία τού άξονα τών x .Ό άξονας τών x είναι κατάλληλος γιά άρχικά σημεία.

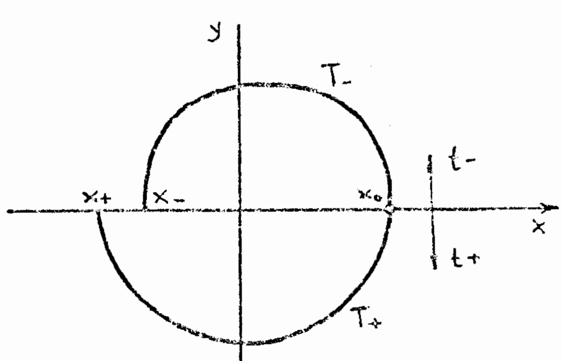
Γιά κάθε άρχικό σημείο $(x_0,0)$έχουμε μιά παράμετρο τήν ό-ποία μπορούμε νά μεταβάλουμε,γιά νά πετύχουμε ταλάντωση.Μιά παρά-μετρος όμως δέν είναι ίκανή γιά νά ίκανοποιήση δύο συνθήκες,χρει-άζεται τουλάχιστον άλλη μία. Σάν τέτοια παράμετρο διαλέγουμε τήν άρχική φάση φ .Βάσει τών παραπάνω τόσύστημα πού μάς άπασχολεί είναι τό :

$$\dot{y} + g(x,y,\omega t+\varphi) = 0$$
$$\dot{x} = y$$
$$x(0)=x_0 \quad , \quad y(0)=0$$

Ή φάση φ είναι μιά πολύ λογική παράμετρος.Τό σύστημά μας έν γένει παρουσιάζει μιά μεταβατική κα-τάσταση.μέ άποτέλεσμα στήν τελική κατάσταση νά μήν τέμνει τόν ά-ξονα τών x μέ τήν άρχική φάση πού είχε.

Δυστυχώς σάν παράγοντας ή φάση δέν μπορεί νά χρησιμοποι-ηθεί καθόλου στή μέθοδό μας,άλλά μιά καί δέν μπορέσαμε νά βρούμε κάτι καλλήτερο τήν χρησιμοποιούμε,άναφέροντας καί όλατά συμπερά-σματα τά σχετικά μέ αύτήν γιά νά βοηθηθούν όσοι άσχοληθούν άργό-τερα μέ τό θέμα αύτό.

Θά άναφέρουμε τώρα δύο συνθήκες ίκανές καί άναγκαίες γιά ύπαρμονική ταλάντωση,ίσοδύνα-μες μέ τίς προηγούμενες,άλλά περισσότερο κατάλληλες γιά τήν μέθοδό μας.



ΣΧΗΜΑ ΙΙΙ.2

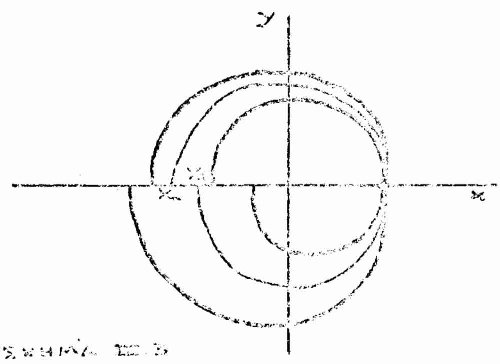
Έστω T_- καί T_+ ή τροχιές τού συστήματος γιά t στό παρελ-θόν καί t στό μέλλων,(σχήμαΙΙΙ.2) Άν $\Delta_-(\omega,\varphi)$καί $\Delta_+(\omega,\varphi)$ οί χρόνοι το-μής μέ τόν άξονα x,τών τροχιών, καί x_- καί x_+ οί τομές τότε:

Υ1. $\quad \Delta_-(\omega,\varphi) + \Delta_+(\omega,\varphi) = T$

Υ2. $\quad x_-(\omega,\varphi) = x_+(\omega,\varphi)$

είναι ίκανές καί άναγκαίες συνθήκες γιά ύπαρμονική ταλάντωση. Ή άπόδειξη είναι προφανής άφού συμπληρώνεται κύκλος σέ χρόνο T.

Ἡ μέθοδος μέ τίς συναρτήσεις φραγής, ἄν ἐφαρμοστεί δύο φορές, στό πάνω καί στό κάτω ἡμιεπίπεδο, σάν νά είχαμε περίπτωση ἄρτιας συμμετρίας μπορεί νά μάς ἐξασφαλίσει τά ἑξείς:



Σχημα ΙΙΙ.3

Ὕπαρξη τών σημείων x_-, x_+ .
Φράγματα γιά τούς χρόνους τομής $\Delta_-(\omega,\phi)$, $\Delta_+(\omega,\phi)$.
Συνέχεια τών διαφόρων συναρτήσεων ὡς πρός τίς παραμέτρους, ω συχνότητα καί φ φάση.

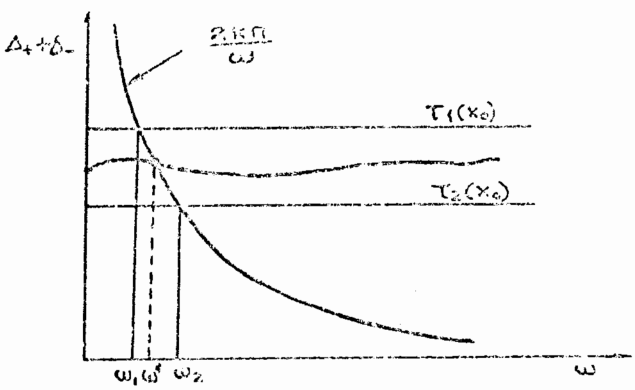
Ἀφού οἱ δύο χρόνοι τομής είναι συνεχείς συναρτήσεις ὡς πρός τίς δύο παραμέτρους τό ἴδιο θά ἰσχύει καί γιά τό ἄθροισμα τών δύο χρόνων. Τά φράγματα τους μάς βοηθούν νά βρούμε φράγματα τού ἀθροίσματος, συγκεκριμένα:

Ἄν

$$T_1^+(x_0) > \Delta_+(\omega,\phi) > T_2^+(x_0)$$

καί $$T_1^-(x_0) > \Delta_-(\omega,\phi) > T_2^-(x_0)$$

τότε $$T_1(x_0) \triangleq T_1^+(x_0) + T_1^-(x_0) > \Delta_+(\omega,\phi) + \Delta_-(\omega,\phi) > T_2^+(x_0) + T_2^-(x_0) \triangleq T_2(x_0)$$



Σχημα ΙΙΙ.4

Ἐφαρμόζοντας πάλι τήν μέθοδο μέ τήν ὑπερβολή, μπορούμε νά ἀποδείξουμε ὅτι γιά κάθε φ ὑπάρχει συχνότητα ω^* ὥστε ὁ χρόνος $\Delta_+(\omega,\phi)+\Delta_-(\omega,\phi)$ νά είναι T, τό T ὅμως είναι $\frac{2k\pi}{\omega}$, μιά ὑπερβολή ὅπως φαίνεται στόσχήμα ΙΙΙ.4 .

Γιά κάθε φ ὑπάρχει μιά συχνότητα, ἡ συνάρτηση $\omega^*(\phi)$ είναι συνεχής καί περιοδική ὡς πρός φ. Είναι περιοδική γιατί ἄν ἀντί γιά φ είχαμε $\phi+2k\pi$ τό ἀποτέλεσμα θά ἦταν τό ἴδιο γιά τό σύστημά μας.

Τά σημεία ἐπίσης $x_+(\phi,\omega^*(\phi))$, $x_-(\phi,\omega^*(\phi))$ είναι καί αὐτά περιοδικές συναρτήσεις τού φ.

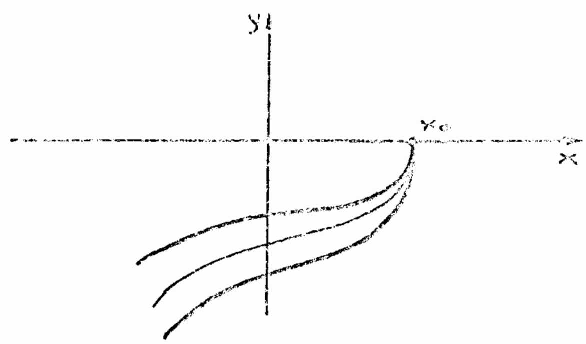
Ἐκείνο πού πρέπει νά γίνει τώρα είναι, νά δείξουμε ὅτι ὑπάρχει ϕ_0 καί τό ἀντίστοιχο $\omega^*(\phi_0)$ ὥστε $x_+ = x_-$.
Ικανή συνθήκη γιά αὐτό είναι νά βρούμε δύο φάσεις ϕ_1 καί ϕ_2 ὥστε $x_+(\phi_1,\omega^*(\phi_1)) > x_-(\phi_1,\omega^*(\phi_1))$ καί $x_+(\phi_2,\omega^*(\phi_2)) < x_-(\phi_2,\omega^*(\phi_2))$, ὁπότε λόγω συνεχείας ὑπάρχει ϕ_0 ὥστε $x_+(\phi_0,\omega^*(\phi_0)) = x_-(\phi_0,\omega^*(\phi_0))$.

Μέ τίς καμπύλες φραγής δέν είναι δυνατόν νά βρούμε δύο τέτοιες φάσεις, ἐπειδή οἱ καμπύλες είναι ἀνεξάρτητες τής φάσεως φ.

Ἡ μέθοδος μπορεῖ νά μήν ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη τῶν ὑπαρμονικῶν,ὅμως μᾶς δίνει πάντοτε τίς ποσοτικές πληροφορίες πού ἔδινε καί στό παρελθόν.Ἄν δηλαδή ἀπό τό x_o διέρχεται ὑπαρμονική ἡ συχνότητα αὐτή θά κεῖται μέσα στά ὅρια πού ὁρίζονται ἀπό τό σχῆμα II.14 .

Φαίνεται ὅτι ἡ ὕπαρξη καμπυλῶν φραγῆς εἶναι σημάδι ὑπάρξεως ὅλων τῶν ὑπαρμονικῶν.Μέ τήν βοήθεια τῶν συστημάτων μικρῆς διαταραχῆς θά δείξουμε ὅτι ὑπάρχουν ὅλες οἱ ὑπαρμονικές,ἀπό μία τάξη καί πάνω,ὑπάρχει πάντοτε τό γενικό πρόβλημα.

Ἡ μέθοδος μπορεῖ νά μήν ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη,ὅμως μπορεῖ νά μᾶς ἐξασφαλίσει τήν μή ὕπαρξη.



Σχῆμα III.5

Καμπύλες φραγῆς σάν αὐτές τοῦ σχήματος III.5 ,ἐμποδίζουν τήν τροχιά τοῦ συστήματος νά κλείσει.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Ἕνα ἐρώτημα πού μπορεῖ νά γεννηθεῖ στόν καθένα εἶναι,γιατί μόνο ἄρτια καί περιττή συμμετρία καί ὄχι κάποια ἄλλη.

Ἄν προσέξουμε τίς δύο συμμετρίες,μᾶς βοηθοῦν νά ξέρουμε τά $x(-t)$, $y(-t)$ ὅταν ξέρουμε τά $x(t)$, $y(t)$,δηλαδή:

$$x(-t) = x(t), \quad y(-t) = -y(t) \qquad \text{γιά άρτια,} \qquad x(-t) = -x(t), \quad y(-t) = y(t) \qquad \text{γιά περιττή}$$

Μποροῦμε νά ὁρίσουμε ἐπομένως συμμετρίες τῆς μορφῆς

$$x(-t) = A_x(x(t), y(t), t)$$

$$y(-t) = A_y(x(t), y(t), t)$$

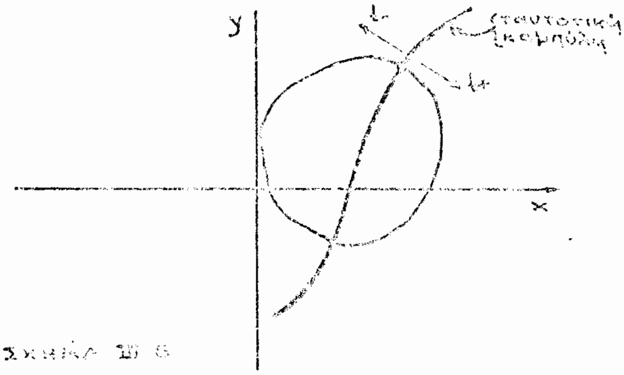
Οἱ δύο αὐτές συναρτήσεις θά πρέπει νά εἶναι τέτοιες,ὥστε οἱ καμπύλες

$$x = A_x(x, y, o)$$

$$y = A_y(x, y, o)$$

νά συμπίπτουν στήν ἴδια καμπύλη,στό ἐπίπεδο

x, y .Τήν καμπύλη αύτή θά τήν όνομάσουμε <u>ταυτοτική καμπύλη</u>. Τό χαρακτηριστικό της είναι ότι όταν τήν τμήση ή τροχιά γιά t_+ θά τήν τμήση καί ή τροχιά γιά t_- καί μάλιστα στό ίδιο σημείο



Σχήμα III 6

Ἡ καμπύλη αύτή άποτελεί τόν τόπο τών άρχικών σημείων τού συστήματος.

Τέτοιες καμπύλες ήταν ό άξονας x στήν άρτια συμμετρία καί ό άξονας y στήν περιττή συμμετρία.

Ἀν βρίσκαμε τέτοιες καμπύλες,τότε πάλι άντί γιά δύο συνθήκες θά είχαμε μία,τήν όποία μέ τίς καμπύλες φραγής μπορούμε νά τήν έλέγξουμε.

Ὁ προσδιορισμός τών συναρτήσεων A_x , A_y καταλήγει σέ διαφορικές μέ μερικές παραγώγους,θέμα δυσκολότερο καί άπό τό θέμα τών ύπαρμονικών.

Ὁ λόγος πού ύπάρχει ή παράγραφος αύτή είναι ότι καταλήξαμε σέ ένα βασικό συμπέρασμα όταν προσπαθήσαμε νά προσδιορίσουμε συμμετρίες τού τύπου:

$$\begin{aligned} x(-t) &= A_x(x(t), y(t)) \\ y(-t) &= A_y(x(t), y(t)) \end{aligned} \qquad (a)$$

όπου δηλαδή στίς συναρτήσεις A_x καί A_y δέν ύπάρχει ό χρόνος.

Γιά συστήματα τού τύπου

$$\begin{aligned} \dot{y} + g(x,y,t) &= 0 \\ \dot{x} &= y \end{aligned}$$

οί μόνες δυνατές συμμετρίες τού τύπου (a) πού μπορούν νά έμφανισθούν,είναι:

Συμμετρία ώς πρός $y=0$ (άρτια συμμετρία)

Συμμετρία ώς πρός $x=c$ (περιττή συμμετρία),όχι δηλαδή άπαραίτητο $x=0$.

Ἡ άπόδειξη τής προτάσεως αύτής βρίσκεται στό μαθηματικό παράρτημα σελίδα 56 .

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕ ΜΙΚΡΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

Τά συστήματα αὐτά ἔχουν μιά παράμετρο ἡ ὁποία ἔχει "ἀρκούντως μικρή τιμή". Τέτοια συστήματα τά συναντάμε στή βιβλιογραφία πολύ συχνά. Πολλές προσεγγιστικές μέθοδοι ἀναφέρονται σέ τέτοια συστήματα καί ἡ μικρή τιμή τής παραμέτρου ἐξασφαλίζει τήν σύγκλιση τής σειράς, πού εἶναι ἡ λύση τού συστήματος.

Ἐν γένει αὐτό πού πετυχαίνουμε μέ τήν μικρή τιμή τής παραμέτρου εἶναι νά μεταφέρουμε τό συμπεράσματα πού βγάζουμε γιά τιμή τής παραμέτρου ἴσης μέ μηδέν.

Ἡ ὅλη θεωρία εἶναι ἀρκετά πολύπλοκη ἀλλά μάς ἐξασφαλίζει τήν ὕπαρξη ὑπαρμονικών μεγάλης τάξεως.

Ἡ ἰδιότητα πού μάς ἐνδιαφέρει εἶναι φυσικά ἡ περιοδικότητα τής λύσεως.

ΔΙΑΤΑΡΑΞΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΛΥΣΗ

Ἔστω τό σύστημα :

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t, \bar{\varepsilon})$$

Τό $\bar{\varepsilon}$ διάνυσμα μέ μέτρο ἀρκούντως μικρό.

Ὑποθέτουμε ὅτι γιά $\varepsilon=0$ τό σύστημά μας ἔχει περιοδική λύση, περιόδου T, ἔστω ὅτι $\bar{p}(t)$ ἡ περιοδική αὐτή λύση.

Θά ἐξετάσουμε τώρα ὑπό ποιές συνθήκες διατηρεῖται ἡ περιοδικότητα τής λύσεως καί γιά ε διάφορο τού μηδενός.

Πρίν νά ἀναφέρουμε τίς βασικές ὑποθέσεις θά κάνουμε δύο βασικές παρατηρήσεις

1. Τό T δέν εἶναι ἀνάγκη νά εἶναι ἡ ἐλάχιστη περίοδος τής $\bar{x}(t)$ ἤ τής $\bar{f}$.
2. Ἡ $\bar{f}$ δέν εἶναι ἀνάγκη νά ἐξαρτᾶται ἀπό τόν χρόνο.

Ἡ δεύτερη παρατήρηση εἶναι βασική γιά τήν περίπτωση τών ὑπαρμονικών μεγάλης τάξεως.

Σύμφωνα μέ τό βιβλίο τών Coddington καί Levinson Theory of ordinary differential equations.

Ἄν :

Y1. $\bar{f}$ πραγματική καί συνεχής ὡς πρός τά $(\bar{x}, t, \bar{\varepsilon})$ γιά $\|\bar{\varepsilon}\|$ μικρό.

Y2. ὑπάρχουν οἱ πρώτοι μερικοί παράγωγοι τής $\bar{f}$ ὡς πρός τίς συνιστώσες τού $\bar{x}$ καί είναι συνεχείς.

Υ3. ή έξίσωση πρώτων μεταβολών γιά $\epsilon = 0$ δέν έχει περιοδική λύση περιόδου Τ,

τότε:

Σ τό σύστημα έχει περιοδική λύση $\bar{q}(t,\bar{\epsilon})$ περιόδου Τ, συνεχή ώς πρός $\bar{\epsilon}$ καί τέτοια ώστε $\bar{q}(t,0) = \bar{p}(t)$. Γιά κάθε $\bar{\epsilon}$ ύπάρχει μία τέτοια λύση.

Λέγοντας έξίσωση πρώτων μεταβολών έννοούμε γραμμικοποίηση τού συστήματος στό "σημείο" $\bar{x}(t) = \bar{p}(t)$, δηλαδή: άν οί έξισώσεις τού συστήματος είναι:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n; t, \bar{\epsilon}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

τότε οί έξισώσεις πρώτων μεταβολών είναι:

$$\dot{y}_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p_1, p_2, \ldots, p_n, t, 0) \cdot y_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(p_1, p_2, \ldots, p_n, t, 0) \cdot y_2 + \cdots$$

Στήν περίπτωση πού οί έξισώσεις πρώτων μεταβολών έχουν περιοδική λύση περιόδου Τ, τότε πάλι ύπό όρισμένες προυποθέσεις ύπάρχει περιοδική λύση, μόνο πού τώρα ή περίοδος δέν είναι Τ άλλά $T + \tau(\bar{\epsilon})$, μονοσήμαντα όρισμένη γιά κάθε $\bar{\epsilon}$.

Θά προσπαθήσουμε τώρα νά έφαρμόσουμε αύτά πού είπαμε. Έστω τό σύστημα:

$$\dot{y} + g(x, y, t, \bar{\epsilon}) = 0$$
$$\dot{x} = y + h(x, y, t, \bar{\epsilon})$$

Άν τό $g(x,y,t,0)$ έμφανίζει κάποια γνωστή συμμετρία, άρτια δηλαδή ή περιττή καί $h(x,y,t,0) = 0$. Τότε τά συμπεράσματα γιά περιοδικότητα πού βγάζουμε στήν περίπτωση:

$$\dot{y} + g(x, y, t, 0) = 0$$
$$\dot{x} = y$$

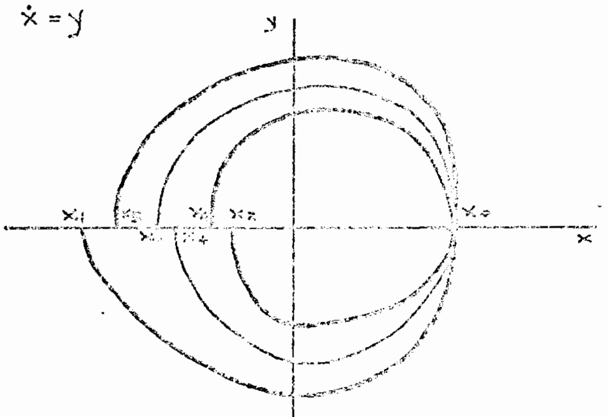
ίσχύουν καί γιά $\|\bar{\epsilon}\|$ άρκετά μικρό. Άν έπομένως παρουσιάζονται ύπαρμονικές, κάτι πού μπορούμε νά τό έλέγξουμε, τό ίδιο θά συμβαίνει καί γιά $\|\bar{\epsilon}\|$ μικρό.

<u>ΥΠΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΜΕΓΑΛΗΣ ΤΑΞΕΩΣ</u>

Θά έξετάσουμε συστήματα τής μορφής:

$\dot{y} + g(x,y) = F(k\omega t)$

$\dot{x} = y$



Σχήμα ΙΙΙ.7

Ὑποθέτουμε ὅτι ὑπάρχουν καμπύλες φραγής σάν αὐτές τοῦ σχήματος ΙΙΙ.7 .
Οἱ καμπύλες αὐτές βγαίνουν ἄν λύσουμε τό σύστημα

$\dot{y} + g(x,y) = M\ (m)$

$\dot{x} = y$

$x(0) = x_0 \qquad y(0) = 0$

ὅπου M καί m τό μέγιστο καί τό ἐλάχιστο τῆς συναρτήσεως $F(k\omega t)$.

Θά δείξουμε τώρα ὅτι ὑπάρχει σταθερά c μέ $m < c < M$ τέτοια ὥστε ἡ λύση τοῦ συστήματος

$\dot{y} + g(x,y) = c$

$\dot{x} = y$

νά εἶναι περιοδική.

Γιά νά συμβαίνει κάτι τέτοιο πρέπει $x_+(c) = x_-(c)$.

Ἄν τό c μεταβληθεῖ ἀπό m ἕως M τό x_+ θά πάρει ὅλες τίς τιμές ἀπό x_1 ἕως x_2 καί τό x_- ἀπό x_3 ἕως x_4 . Γιά κάθε x_+ ὑπάρχει ἕνα c, ἐπομένως καί ἕνα x_-, δημιουργοῦμε δηλαδή μιά ἀπεικόνιση τοῦ διαστήματος (x_1, x_2) στό διάστημα (x_3, x_4) πού εἶναι ὑποδιάστημα τοῦ πρώτου. Ἀπό τό θεώρημα σταθεροῦ σημείου, ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον x_+^* (ἐπομένως καί c^*) ὥστε $x_+^* = x_-^*$, δηλαδή περιοδική λύση.

Ὁρίζουμε τώρα τήν $F(k\omega t)$ ὡς ἑξῆς $F(k\omega t) = c^* + A(k\omega t)$ ὅπου ἡ $A(k\omega t)$ ἔχει μέση τιμή μηδέν. Καί ἀλλάζουμε τίς μεταβλητές μας ὡς ἑξῆς:

$$y = Y + \frac{H(k\omega t)}{k\omega}$$

$$x = X$$

ὅπου $H(s) = \int_0^s A(u)\,du$ καί ἡ ὁποία εἶναι περιοδική ἀφοῦ ἡ $A(s)$ ἔχει μέση τιμή μηδέν.

Τό σύστημά μας τώρα γίνεται:

$$\begin{aligned} \dot{y} + g\left(x, y + \frac{H(k\omega t)}{k\omega}\right) &= c^* \\ \dot{x} = y + \frac{H(k\omega t)}{k\omega} & \end{aligned} \quad (\varepsilon)$$

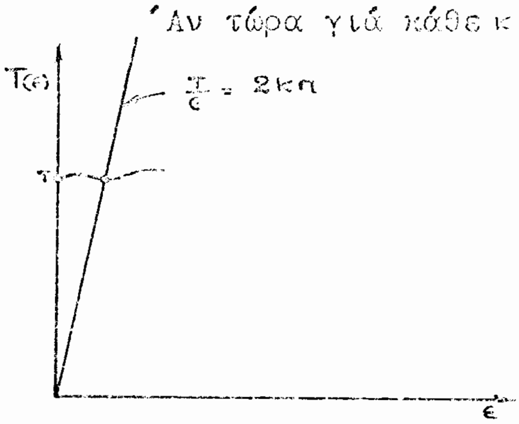
Θά δείξουμε ότι γιά κάθε κ μεγαλύτερο άπό μιά τιμή ,ύπαρχει ω ώστε τό σύστημα ε νά έχει περιοδική λύση.

'Ορίζουμε τώρα τό σύστημα:

$$\begin{aligned} \dot{y} + g(x, y + \epsilon \cdot H(k\omega t)) &= c^* \\ \dot{x} = y + \epsilon \cdot H(k\omega t) & \end{aligned} \quad (\varepsilon\varepsilon)$$

Γιά $\epsilon=0$ έχει περιοδική λύση,όπως είδαμε.'Αν ικανοποιούνται τώρα καί οί άλλες ύποθέσεις δηλαδή $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ συνεχείς τότε γιά κάθε ε άρκετά μικρό,τό σύστημα εε έχει περιοδική λύση,μέ περίοδο $T(\epsilon)$,κοντά στήν περίοδο Τού συστήματος όταν τό ε είναι μηδέν.

'Αν τώρα γιά κάθε κ θεωρήσουμε τήν συνάρτηση $T(\epsilon)$ όπως στό σχήμα III.8 ,έμεις θέλουμε ένα $\epsilon = \frac{1}{k\omega}$,άλλά $\omega = \frac{2\pi}{T}$ όπότε $\epsilon = \frac{T}{2k\pi} \longrightarrow \frac{T}{\epsilon} = 2k\pi$



ΣΧΗΜΑ III.8

Στό έπίπεδο T,ε ή τελευταία σχέση δέν είναι παρά μία εύθεία, πού όταν τό κ πάρει μεγάλη τιμή προσεγγίζει τόν άξονα τών T.

'Επειδή καί ή συνάρτηση $T(\epsilon)$ είναι φραγμένη (άπό τά φράγματα τού χρόνου τομής)ή εύθεία θά τέμνει τήν $T(\epsilon)$ σέ κάποιο σημείο,πού θά είναι ή περίοδος ταλαντώσεως τού συστήματος.

'Αν έχουμε τομή γιά κάποιο k_0 ,τότε θά έχουμε τομή γιά κάθε $k > k_0$.

'Αφού ή είσοδος έχει συχνότητα κ φορές μεγαλύτερη τού συστήματος,έχουμε κ-ύπαρμονική.

IV. ΑΛΛΟΚΟΤΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Τό κεφάλαιο αὐτό,ἀναφέρεται σέ ἕνα καθαρά μή γραμμικό φαινόμενο . Οἱ ἀλλόκοτες ταλαντώσεις,εἶναι ταλαντώσεις μέ θεμελιώδη περίοδο,περίοδο πού δέν ὑπάρχει στήν εἴσοδο.

Γιά νά εἶναι δυνατόν κάτι τέτοιο,θά πρέπει ὁ συνδιασμός συστήματος-εἰσόδου νά ἔχει ἰδιαίτερη μορφή.

Γιά τήν λύση τοῦ προβλήματος,ὅταν ζητήσουμε τό σύστημά μας νά δέχεται ἀλλόκοτες ταλαντώσεις,ἡ τάξη τοῦ συστήματος ἐλαττώνεται, ἀλλά καταλήγουμε σέ ἕνα σύστημα,ὅπου οἱ ἄγνωστοι εἶναι λιγότεροι ἀπό τίς ἐξισώσεις,τό σύστημα αὐτό θά πρέπει βέβαια νά εἶναι συμβιβαστό.

Σάν ἕνα πρῶτο βῆμα,θά δώσουμε τήν γενική μέθοδο ἀντιμετωπίσεως τοῦ προβλήματος καί μετά ὁρισμένα παραδείγματα.

Ἔστω τό σύστημά μας ὑπό μητρική μορφή: $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},t)$.

Ἄν ἐμφανίζει ἀλλόκοτη ταλάντωση,τότε μιά χρονική κατά τ μετατόπιση τῆς εἰσόδου,θά δέχεται τήν ἴδια ἔξοδο,ὅπου τ βέβαια ἡ περίοδος τῆς ταλαντώσεως.

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = \bar{f}(x,t) \\ \dot{x} = \bar{f}(x,t+\tau) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{x} = \bar{f}(x,t) \\ \bar{f}(x,t) = \bar{f}(x,t+\tau) \end{array}\right.$$

Ἀπό τήν σχέση $\bar{f}(x,t) = \bar{f}(x,t+\tau)$ εἴμαστε ἱκανοί νά βροῦμε τήν λύση,ἀφοῦ ἡ σχέση αὐτή εἶναι ν ἐξισώσεις.Παρατηροῦμε ἐπίσεις ὅτι δέν ὑπάρχει πουθενά παράγωγος,δηλαδή δέν ἔχουμε σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀλλά ἕνα σύστημα μή γραμμικῶν ἐξισώσεων πού γιά κάθε t ἄν ἐπιλυθῆ θά μᾶς δώσει τό διάνυσμα $\bar{x}(t)$.
Τό διάνυσμα αὐτό εἶναι πιθανή λύση τοῦ συστήματός μας. Γιά νά εἶναι, πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική μας ἐξίσωση: $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x},t)$
Ἐδῶ ἀκριβῶς ὑπάρχει τό συμβιβαστό τῶν ἐξισώσεων.

Σάν πρῶτο παράδειγμα θά ἀναφερθοῦμε σέ συστήματα τῆς μορφῆς: $\underline{\dot{\bar{x}} + \bar{f}(\bar{x}) = \bar{g}(t)}$ ὅπου δηλαδή,εἴσοδος καί σύστημα δέν εὑρίσκονται σέ πεπλεγμένη μορφή.Τά συστήματα αὐτά δέν παρουσιάζουν ἀλλόκοτες ταλαντώσεις.

Ἡ ἀπόδειξη εἶναι πολύ ἁπλή. Ὑποθέτουμε ὅτι δέχεται ἀλλ. ταλάντωση περιόδου τ. Βάσει τῶν προηγουμένων θά πρέπει:
$\bar{f}(x)-\bar{g}(t)=\bar{f}(x)-\bar{g}(t+\tau)$ πού σημαίνει ὅτι καί $\bar{g}(t)=\bar{g}(t+\tau)$
ἡ σχέση ὅμως αὐτή ἰσχύει γιά κάθε t, πού σημαίνει ὅτι τό τ εἶναι περίοδος τῆς εἰσόδου, ἄτοπον λόγῳ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀλλ. ταλαντώσεως.

Σάν δεύτερο παράδειγμα, ἡ διαφορική ἐξίσωση:
$\ddot{x}+x+(x^2+(\dot{x})^2-1)\cdot h(t)$
ἄν κάνουμε καί ἐδῶ χρονική μετατόπιση κατά τ και ἀφαιρέσουμε, τότε καταλήγουμε στήν σχέση $(x^2+(\dot{x})^2-1)\cdot h(t+\tau)=(x^2+(\dot{x})^2-1)h(t)$
πού γιά νά ἰσχύει γιά κάθε t θά πρέπει $x^2+(\dot{x})^2-1=0$
ἐξίσωση εὔκολα ἐπιλύσιμη: $\dot{x}=\sqrt{1-x^2} \Longrightarrow dt=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow$
$t+\varphi=\cos^{-1}x \longrightarrow \underline{x=\cos(t+\varphi)}$

Ἡ ταλάντωση αὐτή πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική ἐξίσωση. Μέ ἀντικατάσταση παρατηροῦμε ὅτι τήν ἱκανοποιεῖ.
Ἡ περίοδος τῆς $x=\cos(t+\varphi)$ εἶναι 2π καί τῆς $h(t)$ μπορεῖ νά εἶναι ὁποιαδήποτε.

Στό παράδειγμα αὐτό μποροῦμε νά παρατηρήσουμε τό ἑξῆς, τό σύστημά μας εἶναι δυνατόν νά λάβει ὑπ' ὄψη του τήν εἴσοδο, νά ἐμφανίση δηλαδή ὑπαρμονικές. Τό τί θά προτιμήση νά κάνει ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες, πόσο κοντά βρίσκονται σέ κάποια ταλάντωση καί ἐπίσης ἀπό τήν εὐστάθεια τῆς ταλαντώσεως. Τό σύστημα θά προτιμήση τήν εὐσταθῆ ταλάντωση.

Μιά ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις τῶν ἀλλ. ταλαντώσεων εἶναι, ὅταν ἡ ἔξοδος ταλαντώνεται μέ περίοδο πού εἶναι κάποιο ρητό κλάσμα τῆς περιόδου τῆς εἰσόδου. Αὐτές οἱ ταλαντώσεις, δέν εἶναι οἱ γνωστές μας ὑπερ-υπαρμονικές, γιατί στίς τελευταῖες ἡ περίοδος ταλαντώσεως, εἶναι ἀκέραιο πολλαπλάσιο τῆς περιόδου τῆς εἰσόδου, παρ' ὅλο πού ὑπάρχουν συχνότητες πού εἶναι ρητά κλάσματα τῆς θεμελιώδους συχνότητας εἰσόδου.

Ἀκολουθοῦν δύο παραδείγματα στά ὁποῖα ἐμφανίζεται ταλάντωση τοῦ τύπου πού περιγράψαμε. Ἡ περίοδος τῶν ταλαντώσεων αὐτῶν εἶναι τό μισό τῆς περιόδου τῆς εἰσόδου.

Ἔστω ἡ ἐξίσωση:
$\ddot{x}+g_1(x)+p(\lambda t)\cdot g_2(x)=\cos\lambda t$ ὅπου ἡ $p(\lambda t)$ εἶναι ἡ παλμική συνάρτηση συχνότητος λ.

'Αν κάνουμε χρονική μετατόπιση κατά τ καί άφαιρέσουμε μπορούμε νά βρούμε τήν $g_2(x)$, άς παρακολουθήσουμε όμως τήν διαδικασία.

γιά $t = t + \tau$ έχουμε: $\ddot{x} + g_1(x) + p(\lambda t + \lambda\tau)\cdot g_2(x) = \cos(\lambda t + \lambda\tau)$

άφαιρόντας :

$$[p(\lambda t+\lambda\tau) - p(\lambda t)]\cdot g_2(x) = [\cos(\lambda t+\lambda\tau) - \cos(\lambda t)] \longrightarrow$$

$$g_2(x) = \frac{[\cos(\lambda t+\lambda\tau) - \cos(\lambda t)]}{[p(\lambda t+\lambda\tau) - p(\lambda t)]}$$ άν $\lambda\tau = \pi$ δηλαδή $\tau = \frac{\pi}{\lambda}$ (ήμιπερίοδος).

τότε $g_2(x) = \frac{-2\cos(\lambda t)}{-2\,p(\lambda t)} = \frac{\cos\lambda t}{p(\lambda t)} = |\cos\lambda t|$. πού είναι περιόδου $\frac{\pi}{\lambda}$, τό μισό τής εισόδου.

'Από τήν $g_2(x) = |\cos\lambda t|$ μπορούμε νά βρούμε τό $x(t)$.

Τό $x(t)$ γιά νά είναι καί λύση τής άρχικής μας έξισώσεως, θά πρέπει ή συνάρτηση $g_1(x)$ νά έχει ίδιαίτερη μορφή. Θά ζητήσουμε νά βρούμε τήν μορφή αύτή.

$$g_2(x) = \frac{\cos\lambda t}{p(\lambda t)} \longrightarrow g_2(x)\cdot p(\lambda t) = \cos\lambda t \longrightarrow \ddot{x} + g_1(x) = 0 \longrightarrow$$

$$g_1(x) = -\ddot{x}.$$

$$\frac{dg_2}{dt} = \frac{dg_2}{dx}\cdot\dot{x} = -p(\lambda t)\cdot\lambda\cdot\sin(\lambda t) \longrightarrow \frac{d^2g_2}{dt^2} = \frac{d^2g_2}{dx^2}\cdot(\dot{x})^2 + \frac{dg_2}{dx}\cdot\ddot{x} =$$

$$-\lambda^2\cdot(p(\lambda t)\cdot\cos\lambda t) = -\lambda^2\cdot g_2(x) \qquad (a)$$

$$\dot{x} = \frac{-p(\lambda t)\cdot\lambda\cdot\sin\lambda t}{\frac{dg_2}{dx}} \longrightarrow (\dot{x})^2 = \frac{\lambda^2\sin^2\lambda t}{\left(\frac{dg_2}{dx}\right)^2} = \lambda^2\cdot\frac{1-|\cos\lambda t|^2}{\left(\frac{dg_2}{dx}\right)^2} = \lambda^2\cdot\frac{1-g_2^2(x)}{\left(\frac{dg_2}{dx}\right)^2}.$$

μέ άντικατάσταση στή (a)

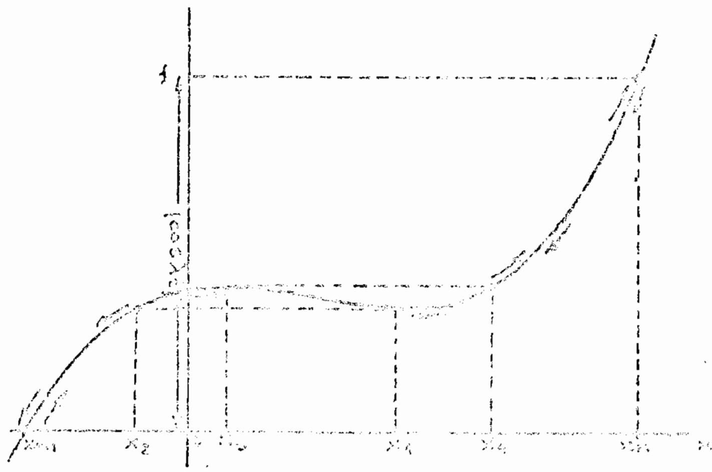
$$\lambda^2\frac{d^2g_2}{dx^2}\cdot\frac{1-g_2^2(x)}{\left(\frac{dg_2}{dx}\right)^2} + \frac{dg_2}{dx}\cdot\ddot{x} = -\lambda^2 g_2(x) \longrightarrow$$

$$-\ddot{x} = g_1(x) = \left[\frac{dg_2}{dx}\right]^{-1}\cdot\left[\lambda^2 g_2(x) + \lambda^2\frac{d^2g_2(x)}{dx^2}\cdot\frac{1-g_2^2(x)}{\left(\frac{dg_2}{dx}\right)^2}\right].$$

'Αν λοιπόν ή $g_1(x)$ είναι τής παραπάνω μορφής τότε λύση θά είναι ή $x = g_2^{-1}(|\cos\lambda t|)$. Αν ή $g_2(x)$ είναι τέτοια ώστε σέ τιμές τής $|\cos\lambda t|$ άντιστοιχούν περισσότερα τού ένός x τότε είναι δυνατόν νά παρατηρήσουμε τό φαινόμενο πηδήματος.

'Ακολουθή μιά είδική περίπτωση τού προηγουμένου παραδείγματος.

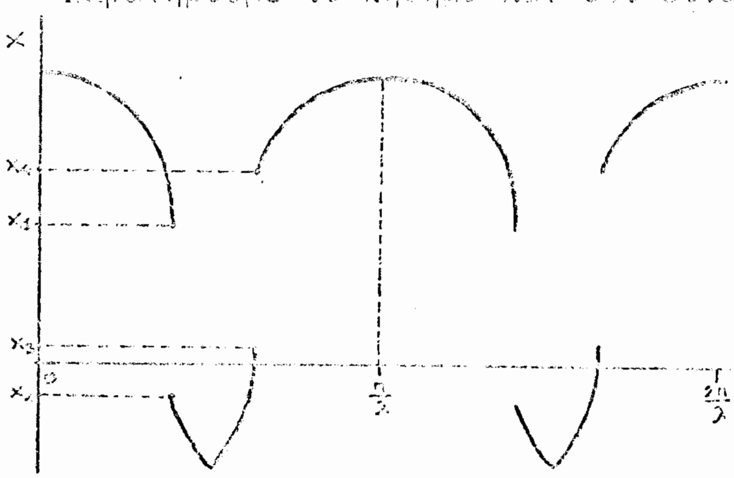
Στό παράδειγμα αύτό έμφανίζεται καί τό φαινόμενο τοῦ πηδήματος.



ΣχημαIV.1

Σάν συνάρτηση $g_2(x)$ πήραμε τήν $g_2(x) = x^3 - 1.05x^2 + 0.18x + 0.4$ ή όποία φαίνεται καί στό σχήμα IV.1 Καθώς αύξανομένου τοῦ χρόνου,μικραίνει τό $|\cos\lambda t|$,τό x θά φθάσει μέχρι τήν τιμή x_1 καί μετά θά κάνει πήδημα στήν τιμή x_2. Όταν άρχίσει νά αύξάνει τό $|\cos\lambda t|$,τό x θά αύξηθῆ μέχρι τήν τιμή x_3 καί θά κάνει πήδημα στήν τιμή x_4

Στό σχῆμα IV.2 φαίνεται ή μεταβολή τοῦ x συναρτήσει τοῦ χρόνου. Παρατηροῦμε τό πήδημα καί ὅτι εἶναι περιόδου $\frac{\pi}{\lambda}$.



ΣχημαIV.2

Άντί γιά τίς συναρτήσεις $p(\lambda t)$ καί $\cos\lambda t$ θά μπορούσαμε νά πάρουμε άλλες συναρτήσεις καί νά βροῦμε σχέσεις μεταξύ τῶν συναρτήσεων $g_1(x)$ καί $g_2(x)$ γιά νά έχουμε άλλ. ταλαντώσεις.

Εἶναι σημαντικό νά ξέρουμε άν τό σύστημά μας έμφανίζει τέτοιες ταλαντώσεις,γιατί οί συχνότητες τῶν ταλαντώσεων αύτῶν,εἶναι τέτοιες,πού δέν τίς περιμένουμε καί τό σύστημά μας εἶναι δυνατόν νά μήν μπορεῖ νά τίς σηκώσει.

V. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - Προτάσεις

΄Οπως είδαμε ή μέθοδός μας μάς δίνει άπάντηση στήν ύπαρξη τών ύπαρμονικών,έπίσης μπορούμε νά πάρουμε ποσοτικά άποτελέσματα όσον έφορά τήν συχνότητα καί τό πλάτος στά όποία έμφανίζεται ύπαρμονική.

Τό βασικό στοιχείο πού μάς έξασφαλίζει τήν ύπαρξη,είναι οί τροχιές φραγής.΄Οταν ύπάρχουν αύτές καί τέμνουν τόν άξονα τών x, τότε ξέρουμε ότι ύπάρχουν όλες οί ύπαρμονικές.Πρέπει έπομένως νά τίς προσέξουμε περισσότερο.

΄Οπως είδαμε οί τροχιές φραγής δέν είναι παρά ή λύση τών έξισώσεων

$$y\frac{dy}{dx} + M(x,y)\,(m(x,y)) = 0$$

Οί συναρτήσεις φραγής μπορούν πάντοτε νά βρεθούν,ή έπίλυση όμως τών έξισώσεων δέν είναι πάντοτε δυνατή,άς είναι πρώτου βαθμού έξισώσεις.

΄Ενα πεδίο έρευνας είναι τό νά μπορέσουμε νά βρούμε συνθήκες μέ τίς όποίες νά έξασφαλίζεται ή ύπαρξη τών τροχιών φραγής καί ή τομή τους μέ τόν άξονα τών x .

Τέτοιες συνθήκες έχουν εύρεθή σέ συστήματα τού τύπου:

$$\ddot{x} + g(x) = F(t)$$

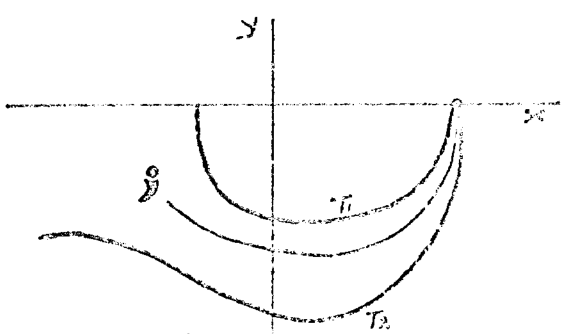
Κάτι τέτοιο θά μπορούσε νά γίνει καί στήν περίπτωσή μας.

΄Οπως είδαμε ή μέθοδός μας δέν λαμβάνει ύπ όψη της καθόλου τήν μορφή τής είσόδου άλλά μόνο τά άκρότατά της.Αύτός άκριβώς είναι καί ό λόγος πού μάς όδηγεί στό νά πιστέφουμε ότι καί γιά άσύμμετρη είσοδο,θά πρέπει πάλι νά έχουμε ύπαρμονικές.

Τό γενικό πρόβλημα ύπάρχει πάντοτε άκόμη καί στίς έξισώσεις β΄ βαθμού.Δώθηκε βέβαια άπάντηση γιά ύπαρμονικές μεγάλης τάξεως,άλλά δέν είναι καί τόσο "καθαρή" όπως στήν περίπτωση τών συμμετριών καί μπορεί νά κρίβει κινδύνους.

Τό στοιχείο πού λείπει,είναι τό πώς συμπεριφέρεται ή τροχιά μιάς εισόδου $F(t)$ έν σχέσει μέ τήν τροχιά τού συστήματος όταν σάν είσοδος είναι μόνο ή μέση τιμή τής $F(t)$. Άν ξέραμε κάτι τέτοιο θά μπορούσαμε νά λύσουμε τό θέμα στήν γενική περίπτωση καί μάλιστα αύστηρά. Φαίνεται μάλιστα, ότι έμφανίζονται ύπαρμονικές σέ συχνότητες πού είναι κοντά σέ άκέραια πολλαπλάσια τής συχνότητος έξόδου τού συστήματος, όταν σάν είσοδος είναι ή μέση τιμή τής $F(t)$.

Ή θεωρία τών τροχιών είναι κατάλληλη γιά διαφορικές β' βαθμού ύπάρχουν όμως διαφορικές άνωτέρου βαθμού, ίσως καί έπεί νά μπορούσαμε νά τίς χρησιμοποιήσουμε γενικεύοντας τήν μέθοδο. Καί στήν περίπτωση όμως τών β'βαθμίων έξισώσεων δέν έφαρμόζεται πάντοτε ή μέθοδός μας.



ΣΧΗΜΑ VI.1

Σάν παράδειγμα είναι τό σχήμα VI.1 όπου ή T_1 τέμνει τόν άξονα τών x καί ή T_2 δέν τόν τέμνει. Στήν περίπτωση αύτή δέν ξέρουμε τί κάνει ή τροχιά τού συστήματος, άν τέμνει ή όχι τόν άξονα τών x.

Τό σχήμα αύτό προυποθέτει ότι μπορούμε νά λύσουμε τίς δύο πρωτοβάθμιες διαφορικές έξισώσεις, πράγμα πού δυστυχώς δέν γίνεται πάντοτε.

Ή ύπαρξη τών τροχιών φραγής έξασφαλίζει όλες τίς ύπαρμονικές, ή μή ύπαρξή τους ίσως σημαίνει ότι τό σύστημα δέχεται μόνο μερικές ύπαρμονικές.

Οί ύπαρμονικές είναι ένα χαρακτηριστικό φαινόμενο πολλές φορές είναι έπιθυμητό καί άλλες φορές όχι, πρέπει λοιπόν νά ξέρουμε άν είναι εύσταθές. Γιά τό πρόβλημα αύτό ύπάρχει πάλι ένα πλήθος άπό συγγράματα καί έργασίες. Γιά τίς β'βαθμού έξισώσεις ή μέθοδος τών μικρών διαταραχών είναι άρκετά καλή, γιατί μετατρέπει τήν έξίσωση σέ γραμμική μέ συντελεστές περιοδικές συναρτήσεις καί ζητάμε ή γενική λύση νά τείνει στό μηδέν.

Μέχρι τώρα άναφερόμασταν σέ ποιοτικά χαρακτηριστικά τής ύπαρμονικής ταλαντώσεως (ύπαρξη, εύστάθεια) καί δέν άναφερθήκαμε καθόλου στήν μορφή πού έχει στόν χρόνο. Στό πρόβλημα αύτό οί προσεγγιστικοί μέθοδοι μέ σειρές είναι ίδανικές. Μέ τίς σειρές αύτές βλέπουμε καί πόση ίσχύ έχει κάποια ύπαρμονική συχνότητα,σέ περίπτωση πού θέλουμε νά τήν χρησιμοποιήσουμε γιά κάποιο σκοπό,άπομονόνοντάς την μέ φίλτρα.

Οί ύπαρμονικές έμφανίζονται συνήθως σέ συστήματα πού έμφανίζουν ταλάντωση σέ σταθερή διέγερση,δηλαδή είναι ταλαντωτές. Άν σέ κάποιο σημείο έμφανίζουν ύπαρμονική,μιά μικρή διαταραχή θά είχε σάν άποτέλεσμα καί τήν είσοδο τής ίδιοσυχνότητος στήν έξοδο,δηλαδή ήμιπεριοδική ταλάντωση.Αύτός είναι καί ό λόγος γιά τόν όποίο τέτοια συστήματα δέν μάς δίνουν ύπαρμονικές ταλαντώσεις σέ έξομοίωση στόν ύπολογιστή.

Άναρωτιέται κανείς γιά ποιό λόγο νά κουραζόμαστε γιά ένα φαινόμενο πού τελικά είναι δύσκολο νά έμφανιστεί.Ή άπάντηση είναι ότι σέ μιά ήμιπεριοδική έξοδο ύπάρχουν όλες οί συχνότητες έπομένως καί οί ύπαρμονικές.Ή ύπαρμονική ταλάντωση δέν παύει νά ύπάρχει,άπλώς συνυπάρχει μέ μία άλλη ταλάντωση πού όφείλεται στό ίδιο τό σύστημα καί όχι στήν είσοδο.Μπορούμε έπομένως νά χρησιμοποιήσουμεκαί τήν ταλάντωση αύτή σάν νά είχαμε τήν ίδια τήν ύπαρμονική.Άν λοιπόν θέλουμε κάποια ύπαρμονική είναι άπαραίτητο νά ξέρουμε άν ύπάρχει.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στό μαθηματικό μας παράρτημα θά άποδείξουμε τό θεώρημα τής σχετικής θέσεως τών τροχιών καί τήν πρόταση γιά τίς συμμετρίες.

<u>ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ ΤΡΟΧΙΩΝ</u>

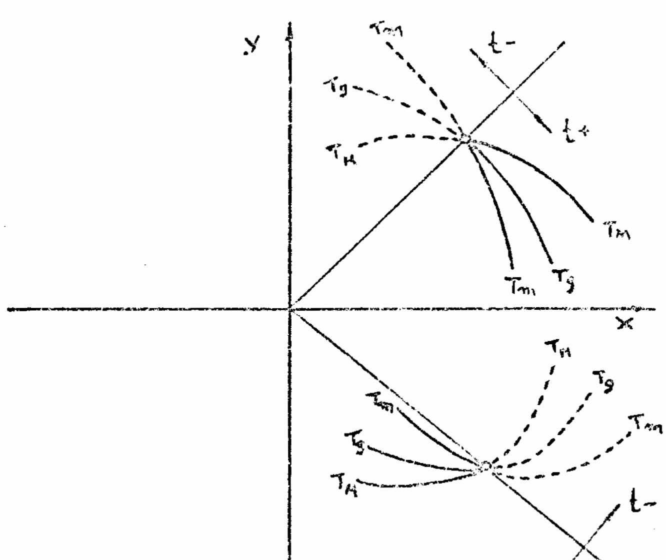
Έστω τά τρία συστήματα:

$$\dot y + m(x,y)=0 \qquad \dot y + g(x,y,t)=0 \qquad \dot y + M(x,y)=0$$

$$\dot x = y \qquad \dot x = y \qquad \dot x = y$$

$$\dot x(0) = x_0 \qquad \dot y(0) = y_0$$

Άν γιά τά συστήματα αύτά ίσχύουν οί έξείς ύποθέσεις:



Σχημα Π.1

Υ1. οί συναρτήσεις $m(x,y)$, $g(x,y,t)$ $M(x,y)$ συνεχείς καί φραγμένες

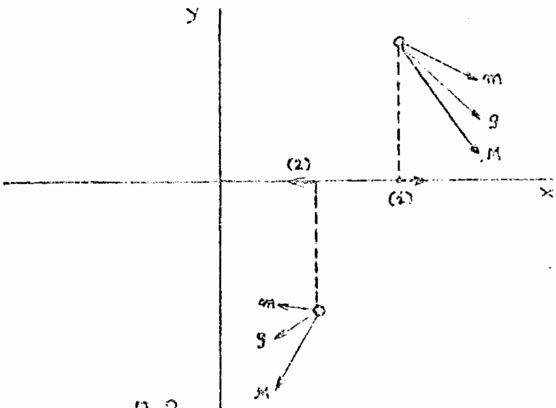
Υ2. $m(x,y) < g(x,y,t) < M(x,y)$

τότε ή σχετική θέση τών τροχιών είναι αύτή τού σχήματος Π.1 .

Πρέπει νά προσέξουμε ότι οί συναρτήσεις $m(x,y)$ καί $M(x,y)$ είναι μόνο συναρτήσεις τών x καί y καί όχι τού χρόνου t .

Αύτό πού έχουμε νά δείξουμε είναι ότι γιά t στό μέλλον τά y διατάσσονται μέ τήν έξής σειρά: $y_M < y_g < y_m$,

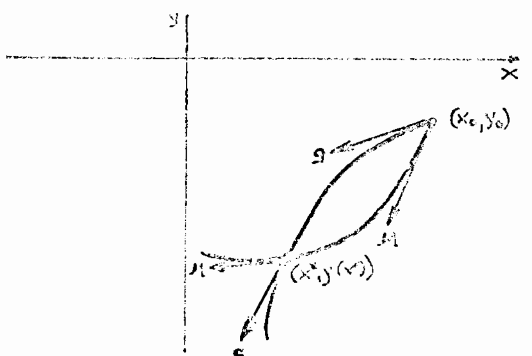
Γιά κάθε σημείο τού έπιπέδου (x,y) οί έφαπτόμενες τών τριών συστημάτων $M(x,y)$, $g(x,y,t)$, $m(x,y)$ διατάσσονται όπως στό σχήμα Π.2 . Αύτό έπειδή τό $\dot x = y$ είναι κοινό καί στά τρία συστήματα καί τά $\dot y$ διατάσσονται όπως τά $-M$, $-g$, $-m$ άφού είναι ίσα μέ αύτά. Τό g βέβαια δέν έχει κλήση πού έξαρτάται μόνο άπό τήν θέση



ΣΧΗΜΑ Π.2

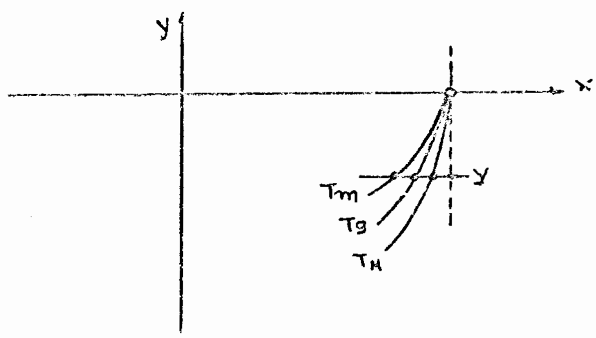
τού σημείου (x,y) άλλά καί άπό τόν χρόνο t ,άντίθετα μέ τίς δύο άλλες κλήσεις πού έξαρτώνται μόνο άπό τήν θέση τού σημείου (x,y) .Πάντως γιά όποιδήποτε t ή κλήση τού g βρίσκεται μεταξύ τών άλλων δύο κλήσεων.

Γιά t στό μέλλον,δηλαδή $dt>0$ έχουμε $\dot{x}=y \to dx=y\cdot dt$.καί έπομένως άν $y<0$ τότε $dx<0$,ή άν $y>0$ τότε $dx>0$.Γιά $dt>0$ τό x κινείται σύμφωνα μέ τό βέλος (1) γιά $y>0$,ή σύμφωνα μέ τό βέλος (2) γιά $y<0$.Κοντά στό άρχικό σημείο οί τροχιές συμπίπτουν μέ τίς έφαπτόμενες,όπότε τά y διατάσσονται σύμφωνα μέ τόν τρόπο πού είπαμε.Θά δείξουμε ότι τήν διάταξη αύτή τήν διατηρούν τά συστήματα γιά κάθε x .



ΣΧΗΜΑ Π.3

Έστω γιά κάποιο x ότι π.χ. $y_g<y_M$.άλλά όπως είδαμε κοντά στό x_0 έχουμε $y_g>y_M$.Λόγω τής ύποθέσεως Υ1 οί λύσεις μας είναι συνεχείς συναρτήσεις όπότε θά ύπάρχει κάποιο σημείο x^* ώστε $y_g(x^*)=y_M(x^*)$καί μέ κλήση όπως τού σχήματος Π.3 ,άτοπο γιατί οί κλήσεις είναι τής μορφής τού σχήματος Π.2 .



ΣΧΗΜΑ Π.4

Ύπάρχει άκόμη ένα λεπτό σημείο πού πρέπει νά προσέξουμε καί αύτό είναι όταν τό άρχικό σημείο είναι στόν άξονα τών x .Έπειδή τό $\dot{x}=y=0$,δέν φαίνεται άμέσως ότι ή διάταξη τών τροχιών θά είναι αύτή πού θέλουμε.Θά δείξουμε ότι καί έδώ ίσχύουν τά ίδια πράγματα.

Γιά y κοντά στό μηδέν μπορούμε νά κρατήσουμε τούς πρώτους όρους τής σειράς Tailor .
Δηλαδή $x\simeq x_0+\frac{dx}{dy}(x_0)\cdot y+\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dy^2}(x_0)\cdot y^2$.Άλλά $\frac{dx}{dy}=\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ καί τό $\frac{d^2x}{dy^2}$ θά τό ύπολογήσουμε ώς έξείς:

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{y}}\right)\right]\frac{1}{\dot{y}}=\frac{\ddot{x}\dot{y}-\ddot{y}\dot{x}}{(\dot{y})^2}\cdot\frac{1}{\dot{y}}=\frac{(\dot{y})^2-\ddot{y}y}{(\dot{y})^3}$$

γιά $y=0$ έχουμε ότι $\frac{dx}{dy}=0$ καί $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{\dot{y}}$.

Ἀλλά $\dot{y}=-m(x_0,0)$ ($\ddot{\eta}$ $g(x_0,0,0)$ $\ddot{\eta}$ $M(x_0,0)$) καί τά $-m$, $-g$, $-M$ άρνητικές ποσότητες.

Ἐπειδή κοντά στό $y=0$ είναι $x=x_0+\frac{1}{2}\frac{1}{\dot{y}}\cdot y^2$ (άφού $\frac{dy}{dx}=0$), έχουμε $x_m(y)<x_g(y)<x_M(y)$,δηλαδή σύμφωνα μέ τό σχήμα Π.4 . Οἱ τροχιές διατηρούν έπομένως τήν διάταξη πού θέλουμε καί στήν περίπτωση πού τό άρχικό σημείο είναι σημείο τού άξονα τών x .

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Θά δείξουμε τώρα ότι άν ορίσουμε συμμετρίες τού τύπου

$\tilde{x} = x(-t) = A(x(t), y(t))$

$\tilde{y} = y(-t) = B(x(t), y(t))$ τέτοιες συμμετρίες είναι δυνατές μόνο ή άρτια καί ή περριτή. Ή πρώτη συμμετρική ώς πρός τήν εύθεία $y=0$,ήδεύτερη ώς πρός τήν εύθεία $x=c$ (όχι δηλαδή άναγκαστικά $x=0$).

Γιά νά είναι τά $(\tilde{x}, \tilde{y})$ λύσεις τού συστήματος γιά $\tilde{t}=-t$ πρέπει:

$-\ddot{\tilde{y}} + g(\tilde{x}, \tilde{y}, -t) = 0$

$-\dot{\tilde{x}} = \tilde{y}$ άν άντικαταστήσουμε τά $\tilde{x}, \tilde{y}$ μέ τά ίσα τους τότε:

$$\frac{\partial B}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial B}{\partial y}\cdot\dot{y} - g(A, B, -t) = 0$$

$$\frac{\partial A}{\partial x}\cdot\dot{x} + \frac{\partial A}{\partial y}\cdot\dot{y} = -B \qquad (1)$$

Ή δεύτερη γράφεται $\frac{\partial A}{\partial x}\cdot y + B = +\frac{\partial A}{\partial y}\cdot g(x,y,t)$

Παρατηρούμε ότι τό άριστερό μέλος είναι άνεξάρτητο τού χρόνου,γιά νά είναι δυνατό κάτι τέτοιο πρέπει $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$ καί $B = -y\frac{\partial A}{\partial x}$ δηλαδή $A = A(x)$ καί $B = -y\frac{dA}{dx}$ έπομένως:

$$\tilde{x} = A(x)$$
$$\tilde{y} = -y\frac{dA}{dx} \qquad (2)$$

Βάσει τών παραπάνω ή πρώτη έξίσωση τής (1) γράφεται

$$-y^2\frac{d^2A}{dx^2} - \frac{dA}{dx}\cdot\dot{y} - g\left(A, -y\frac{dA}{dx}, -t\right) = 0 \rightarrow -y^2\frac{d^2A}{dx^2} = g\left(A, -y\frac{dA}{dx}, -t\right) - \frac{dA}{dx}g(x,y,t)$$

τό άριστερό μέλος είναι πάλι άνεξάρτητο τού χρόνου όπότε

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 0 \rightarrow A(x) = ax + b \qquad (3)$$

Πρέπει έπίσεις νά ύπάρχει καί ή ταυτοτική καμπύλη,δηλαδή άν όπου $(\tilde{x}, \tilde{y})$ άντικαταστήσουμε (x, y) νά προκύπτει ή ίδια καμπύλη άπό τούς τύπους (2) .

Αύτό όμως είναι δυνατόν μόνο στίς έξείς δύο περιπτώσεις

1. $y=0$ καί $A(x)=x$.Όπότε $\tilde{x}=x$, $\tilde{y}=-y$ (άρτια συμμετρία.

2. $y\neq 0$ καί $\frac{dA}{dx}=-1$ γιά $x=c$ καί $A(c)=c$.Άλλά άπό

τήν (3) έχουμε $A(x) = ax + b$
δηλαδή τελικά $A(x) = -x + 2c$, $\tilde{y} = y$ (περριτή συμμετρία
ώς πρός κάποια εύθεία $x = c$).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΡΓΑΣΙΕΣ

1. HEINBOCKEL - STRUBLE Existence of periodic solutions of nonlinear oscillators.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 13, № 1, March 1965.

2. HEINBOCKEL - STRUBLE Periodic solutions for diff. systems with symmetries.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 13, № 2, June 1965.

3. HSU On simple subharmonics.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 17, page 102

4. HSU On the application of elliptic function in nonlinear forced oscill.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 17, page 393 .

5. LEVENSON A numerical determination of subharmonic responce for Duffing equ.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 25, № 1.

6. LEVENSON A numerical determination of ultra-subharmonic responce for Duffing equation.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 26, page 456.

7. MATKOWSKY - ROGERS - RUBENFELD Generation and stability of subharmonic oscill. in nonlinear systems.
J. Soc. Ind. app. Math. October 1971

8. MUSA - KRONAUER Sub - and superharmonic synchronization in weakly nonlinear systems.
J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 25, № 4. page 399

9. ROUCHE Steady oscillations of parametric subharmonic Oscillator; IRE transactions on circuit theory 1962.

10. STRUBLE On the oscillations of a pendulum under parametric excitation. J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 22, No 2, July 1964

11. STRUBLE A discussion of the Duffing problem. J. Soc. Ind. app. Math. Vol. 11, No 3, Sept. 1963

12. STRUBLE Resonant oscillations of the Duffing Equation.

13. VAN DER POL The nonlinear theory of electrical oscillations.

BIBATA

14. CODDINGTON - LEVINSON Theory of ordin. dif. equations.

15. CUNNINGHAM Nonlinear analysis.

16. EASTHAM The spectral theory.

17. HALE Oscillation in nonlinear theory.

18. MILLMAN - HALKIAS Integrated electronics

19. MINORSKY Nonlinear oscillation.

20. SANSONE - CONTI Nonlinear dif. equations.

21. SILJAK Nonlinear systems.